ANNA SIERPINSKA[1]

PERSPEKTYWA INSTYTUCJONALNA W DYDAKTYCE MATEMATYKI

KRAKÓW, 25 MAJA 2009

KRÓTKA HISTORIA KIERUNKÓW BADAŃ NAD NAUCZANIEM I UCZENIEM SIĘ MATEMATYKI NA POZIOMIE PONADPODSTAWOWYM

Niedawne próby syntezy badań nad nauczaniem i uczeniem się matematyki na poziomie ponad-podstawowym (Artigue, Batanero & Kent, 2007) od początku lat 1980-tych do pierwszych lat dwudziestego pierwszego wieku wyróżniają w ich rozwoju kilka kierunków. W latach 1980-tych zainteresowaniem cieszyły się badania skupione na problemach poznawczych jednostki uczącej się niezależnie od kontekstu społecznego, kulturowego czy uwarunkowań biologicznych. W latach 1990-tych zaczęto zwracać

[1] Concordia University, Montréal, Québec, Canada

sierpins@mathstat.concordia.ca

http://www.asjdomain.ca

uwagę, w sposób coraz bardziej systematyczny i poparty teorią, na wpływ środowiska społecznego i kulturalnego na uczenie się matematyki. Badanie nauczania i uczenia się matematyki zaczęło być widziane przez niektórych teoretyków dydaktyki matematyki wręcz jako część antropologii (Chevallard, 1992). Niektóre badania skupiały się na mikro-socjologicznej analizie interakcji między nauczycielem i uczniami i próbowały opisać specyficzne cechy „kultury klasy”, na lekcjach matematyki (np., Cobb & Bauersfeld, 1995; Seeger, Voigt & Waschescio, 1998). Inne widziały zjawiska uczenia się i nauczania matematyki na szerszym tle kontekstu praktyk instytucjonalnych (np. Chevallard, 1999) lub systemów społecznych (Steinbring, 2005). Pod koniec lat 1990-tych doszedł także do głosu kierunek badań mocno inspirowany teoriami „poznania ucieleśnionego” wyrosłymi w dziedzinie „Nauk Poznania”, o ile dobrze tłumaczę nazwy „embodied cognition” i „Cognitive Science” (Maturana & Varela, 1987; Varela, Thompson & Rosch, 1993; Lakoff & Núñez, 2000). Ten ostatni kierunek zwraca uwagę na biologiczne aspekty ludzkiego poznania matematycznego i związane z nimi języki gestów i metafor, ale – podobnie jak kierunek psychologiczny – ignoruje kontekst społeczny i instytucjonalny nauczania i uczenia się matematyki.

Oto kilka szczegółów na temat tych kierunków.

Badania z perspektywy psychologicznej i epistemologicznej

W latach 1980-tych, dydaktycy interesowali się psychologią poznania matematycznego (odwołując się głównie do prac Piageta); epistemologią pojęć matematycznych (często w terminach przeszkód epistemologicznych, odwołując się do Bachelarda lub Lakatosa). Zaczęły powstawać własne („domowego chowu”) teorie procesów uczenia się matematyki (obraz pojęcia – Tall & Vinner, 1981; dualność procesu i przedmiotu – Dubinsky, np. Breidenbach et al., 1992; Dubinsky et al., 2001; Sfard, 1991). Interesowano się poszukiwaniem źródeł trudności w uczeniu się poszczególnych pojęć matematycznych znajdowaniem i opisywaniem związków między tymi trudnościami a przeszkodami epistemologicznymi napotykanymi w historycznym rozwoju pojęć; projektowaniem sytuacji dydaktycznych prowokujących konflikty poznawcze i sprzyjające ich pokonywaniu, itp.

Badania dowodziły nieskuteczności nauczania bardziej zaawansowanych pojęć matematycznych w college'ach lub uniwersytetach. Przykładem może być artykuł Selden, Mason & Selden (1989). Autorzy dali studentom, którzy ukończyli kurs „Calculus" (Rachunek Różniczkowy i Całkowy jednej zmiennej, bez ścisłych definicji i dowodów) zadania, których rozwiązanie nie wymagało niczego więcej ponad to, czego nauczyli się na kursie, ale sformułowali zadania w nieco inny sposób niż ten, do którego studenci przywykli. Na przykład, zamiast „Rozwiąż równanie $4x^3 - x^4 = 0$", pisali, „Znajdź przynajmniej jedno rozwiązanie równania $4x^3 - x^4 = 0$ lub wyjaśnij, dlaczego rozwiązanie nie istnieje." Ani jeden student nie rozwiązał zadań całkowicie poprawnie, i większość w ogóle nie wiedziała, jak się do tych zadań zabrać.

Popularne w tym kierunku były badania rozumienia pojęć nieskończoności, granicy, funkcji, i wyjaśnianie trudności w języku „obrazu pojęcia". Częstym pytaniem zadawanym studentom w badaniach było, „Porównaj 0.999... i 1". Artigue et al. (2007) opisuje doświadczenie, w którym zadano to właśnie pytanie, a zaraz potem pytanie, „Oblicz sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$". Większość studentów na pierwsze pytanie odpowiadała, że 0.999... < 1, a na drugie, że suma jest równa 1, przy czym nikt nie weryfikował odpowiedzi na pierwsze pytanie po odpowiedzeniu na drugie. Wyjaśnienie tego zjawiska w terminach „obrazu pojęcia" powołuje się na stwierdzenie Vinnera i Talla (1981: 152), że sprzeczności w obrazie pojęcia są zupełnie naturalne, ponieważ „różne bodźce mogą aktywować różne elementy obrazu pojęcia, rozwijając się w sposób, który nie tworzy spójnej całości" (cytowane w Artigue et al., 2007: 1014). Wyjaśniano to zjawisko także przez tendencję studentów początkujących do pojmowania pojęć matematycznych jako czynności do wykonania lub procesy zachodzące w czasie, raczej niż jako obiekty same w sobie. Z tego punktu widzenia, odpowiedzi studentów na pierwsze pytanie tłumaczy się twierdząc, że 0.999... rozumieją oni jako niekończący się proces dopisywania dziewiątek, którego rezultatem są liczby zbliżające się do jedynki, ale nigdy jej nie osiągające. Odpowiedzi zaś na drugie pytanie mogą być interpretowane rozumieniem równości $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$, jako „formalna operacja po lewej stronie daje wynik 1".

Innym przykładem badań prowadzonych w tym kierunku jest praca Małgorzaty Przeniosło (Przeniosło, 2002), również poświęcona rozumieniu pojęcia granicy. Praca zawiera opisy rozumienia pojęcia granicy u badanych studentów, w których terminy takie jak „skojarzenia", „wyobrażenia" lub „przekonania" odnoszą się do elementów „obrazów pojęcia funkcji" w sensie Vinnera i Talla. Oto przykład:

> Nawet wyjątkowo zdolne osoby wyniosły z różnych przecież szkół średnich słabo rozwinięte skojarzenia, czasem nawet bardzo odległe od sensu tego pojęcia. Jako przykład można podać... wyobrażenie związane z otoczeniami [jeśli dla każdego otoczenia punktu x_0, (przy czym rozumie się, że otoczenie punktu zawiera ten punkt) obraz tego otoczenia przy funkcji f zawiera g, to $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$]. W tym charakterze można też przytoczyć przekonanie, że by mogła istnieć granica właściwa funkcji przy x dążącym do nieskończoności, wykres nie może w żadnym punkcie przecinać odpowiedniej asymptoty poziomej. (Przeniosło, 2002: 24-25)

Istnienie tego rodzaju obrazów autorka wyjaśnia odwołując się do ogólnych i „naturalnych" mechanizmów poznawczych, co także jest typowe dla omawianego kieruku badań:

> [U badanych obserwuje się] przywiązywanie dużej wagi do reprezentacji ikonicznych, traktowanie ich jako najważniejszego elementu obrazu granicy funkcji, często bezkrytyczne im zawierzanie. Właśnie te wyobrażenia najtrudniej było skorygować. Było to prawdopodobnie skutkiem *naturalnego* (podkr. moje) dążenia do tworzenia takich 'modeli' już w początkowych fazach procesu poznawania pojęć i łatwości posługiwania się nimi na każdym etapie. Niewystarczający poziom rozwoju struktur poznawczych związanych z granicą funkcji sprawiał, że reprezentacje te pozostawały dominującym elementem obrazów. (Przeniosło, 2002: 24)

W tym okresie była też grupa ludzi, do której i ja należałam, którzy wyjaśniali niezgodności między intuicyjnym lub początkowym rozumieniem pojęć matematycznych a ich rozumieniem we współczesnej matematyce w terminach przeszkód epistemologicznych. Na przykład, w odniesieniu do pojęcia granicy, częstym przekonaniem początkujących jest, że „granica to punkt, do którego funkcja dąży, ale go nigdy nie osiąga". W tym kierunku badań, istnienie takiego przekonania wyjaśniałoby się, między innymi, takimi przeszkodami epistemologicznymi jak:

- Myślenie o zmiennych w terminach ruchu (w sposób podświadomy, lub metaforyczny);
- Zmienną niezależną jest zawsze czas, lub wielkość, o której można przyjąć, że zmienia się podobnie jak czas;
- Przekonanie, że warunek nieosiągania jest istotny dla pojęcia granicy; podawanie „kontrprzykładów", czyli funkcji osiągającej swoją granicę, podczas gdy ten warunek nie ma sensu w dzisiejszej definicji pojęcia granicy.

Inne przykłady przeszkód epistemologicznych związanych z pojęciem granicy można znaleźć w (Sierpinska, 1990).

Analiza zjawisk nauczania i uczenia się matematyki zaczyna brać pod uwagę kontekst społeczny i kulturowy tych procesów

W latach 1990-tych, według Artigue et al., zaczęły nabierać znaczenia „perspektywy socjokulturowe i antropologiczne[2], i odniesienia do Wygotskiego zaczęły wypierać powoływanie się na Piageta" (Artigue et al., 2007: 1012). Pociągnęło to za sobą nacisk na rolę języka (naturalnego, graficznego, i języka notacji symbolicznych) i interakcji społecznych w uczeniu się i nauczaniu matematyki. Wzięcie pod uwagę aspektów semiotycznych wiedzy miało szczególne znaczenie dla rozumienia procesów uczenia się i nauczania matematyki zaawansowanej, której poznawanie nie może obyć się bez pośrednictwa specjalistycznej symboliki.

W tych latach interesowały mnie szczególnie problemy nauczania algebry liniowej. Były one codziennością mojej pracy dydaktycznej na Uniwersytecie Concordia. Na początku badania szły w kierunku analizy epistemologicznej podstawowych pojęć algebry liniowej (przestrzeni liniowej, liniowej niezależności, itd.), ale pamiętam, że kiedy przedstawiałam moje wyniki na konferencji w Essen w 1992, wyraźnie już odczuwało się w audytorium zmęczenie tą perspektywą (Sierpinska, 1996). Był to dla mnie sygnał, by perspektywę rozszerzyć, wziąć pod uwagę aspekty społeczne i kulturowe nauczania, o których wszyscy zdawali się w tym czasie mówić. Zabrałam się więc za poszukiwanie antropologicznego wyjaśnienia, skąd biorą się przeszkody epistemologiczne w matematyce. Bardzo przydatna okazała się teoria kultury E.T. Hall'a (Hall, 1981; Sierpinska, 1994). Hall wyróżnia trzy sfery kultury:

- sferę „formalną" jawnych, przekazywanych werbalnie lecz bez uzasadnienia nakazów, zakazów i reguł postępowania i mówienia;

[2] W tym czasie wzrosło też bardzo zainteresowanie etnomatematyką (zob. np. Ubiratan D'Ambrosio, Paulus Gerdes). Lecz etnomatematyka miała niewielki wpływ na badania zjawisk nauczania matematyki na poziomie ponadpodstawowym.

- sferę „nieformalną” norm zachowania i sposobów wykonywania pewnych zadań czy prac, których nie można nauczyć się inaczej jak przez obserwację i naśladowanie, przy czym ani obserwowany ani obserwujący nie wiedzą, że czegoś nauczają lub uczą się;
- sferę „techniczną”, w której działanie oparte jest na zasadach, technikach i teoriach, które są uzasadniane „racjonalnie”, według standardów racjonalności specyficznych dla danej kultury.

Zmiany w sferach formalnej i nieformalnej są powolne i budzą sprzeciw, gdyż członkowie kultury są do tych elementów przywiązani emocjonalnie; stanowią one część ich tożsamości. Ponadto, aby postanowić coś zmienić, trzeba być tego świadomym, a elementy sfery nieformalnej są często nieuświadomione, gdyż taka jest ich natura. W tych sferach właśnie wiedza lub umiejętności mogą funkcjonować jak przeszkody epistemologiczne: przekonania, nieuświadomione sposoby myślenia, które mają wpływ na wiedzę tworzoną w sferze technicznej. Kultura ma szansę na pokonanie przeszkody wtedy, gdy to przekonanie lub sposób myślenia przechodzi ze sfery formalnej lub nieformalnej do sfery technicznej i staje się elementem teorii lub metodologii wymagającym sformułowania i uzasadnienia.

Ponadto, zaczęłam badać wpływ rodzaju interakcji nauczyciel-student-podręcznik na rodzaj i jakość wiedzy na temat algebry liniowej, która wyłania się w toku tych interakcji. Badania prowadziłam w warunkach laboratoryjnych, nagrywając interakcje między nauczycielem, studentem i tekstem podręcznika w czasie 13-tygodniowych indywidualnych kursów algebry liniowej. Próby określenia tego wpływu na podstawie obserwacji całej klasy nie powiodły się: interferencja „szumu informacyjnego” była zbyt duża. W budowaniu modeli obserwowanych typów interakcji, przydatne okazało się pojęcie „formatu interakcji”, zaproponowanego przez Brunera (1985). Wyniki zostały opublikowane w (Sierpinska, 1997). W ten sposób włączyłam się w prace „programu interakcjonistycznego”, o którym szerzej pisałam po polsku w (Sierpinska, 2002). Pojęcie „formatu interakcji” i jego roli w uczeniu się wyjaśniałam, między innymi, w następujący sposób:

Zanim uczeń potrafi sformułować matematyczną definicję lub twierdzenie, wchodzi on w interakcje [z nauczycielem, innymi uczniami], które są czasami zainicjowane przez nauczyciela, ale których rozwój i kształt w dużej mierze zależą od jego własnej inicjatywy. Format tych interakcji wyznacza granice i reguły dotyczące tego, co powiedzieć, jak to powiedzieć, kiedy to powiedzieć, i kto mówi o czym w różnych okolicznościach, ale wszystkie te reguły mają charakter tranzakcji: są one wynikiem bardziej lub mniej jawnych i bezpośrednich negocjacji między nauczycielem a uczniami i między samymi uczniami. Droga do myślenia matematycznego wiedzie przez inicjację w dyskurs matematyczny: nabycie umiejętności odczytywania intencji kryjących się za pewnymi typowymi wyrażeniami; znajomość zwykle czynionych założeń, których nie warto już za każdym razem wypowiadać, itd. Uczeń uczy się tego w toku interakcji z tymi, którzy mają prawo ustanawiania standardów dyskursu matematycznego (zwykle są to nauczyciele), popełniając błedy [tzn. łamiąc reguły owego dyskursu] i będąc korygowanym, próbując negocjować na korzyść własnych sposoby myślenia i mówienia, spierając się z innymi uczącymi się. Ale społeczne i instytucjonalne otoczenie tych interakcji (autorytet nauczyciela, szkoła) nakładają ograniczenia na to, jak daleko uczeń może zajść w tych negocjacjach. (Sierpinska, 1997: 3)

Perspektywa instytucjonalna: Dostrzeganie kontekstu instytucjonalnego nauczania i uczenia się matematyki

Artigue et al. (2007) twierdzą, że obecne badania w dydaktyce matematyki coraz bardziej świadomie idą w kierunku perspektywy instytucjonalnej, co jest, według tych autorów, konsekwencją rozpowszechnienia w latach 1990-tych...

... antropologicznych i socjokulturowych podejść w dziedzinie edukacji. Poznanie staje się postrzegane jako coś, co wyłania się z praktyk instytucjonalnych, a zatem procesów uczenia się nie można zrozumieć bez analizowania tych praktyk i rozpoznania norm i wartości stanowiących ich podstawę. (Artigue et al., 2007: 1016).

Reszta wykładu jest poświęcona temu kierunkowi badań.

PERSPEKTYWA INSTYTUCJONALNA W EDUKACJI OGÓLNEJ

Gdy badamy zjawiska uczenia się i nauczania z perspektywy instytucjonalnej, uczniowie i nauczyciele są dla nas nie tylko podmiotami poznawczymi, psychicznymi i społecznymi, ale także podmiotami instytucji edukacyjnej, działającymi w niej z pozycji ucznia lub nauczyciela. Perspektywa instytucjonalna nie ignoruje aspektów psychologicznych i epistemologicznych, ale wychodzi poza nie, nie abstrachując od rzeczywistości klasy szkolnej, typu szkoły, programów szkolnych i wartości kulturowych.

W ogólnych rozważaniach nad edukacją, perspektywę instytucjonalną reprezentuje, na przykład, opisana przez Jerome S. Brunera (1996), teoria psychologiczno-kulturalna. Teoria ta oparta jest na dziewięciu postulatach; jednym z nich jest „postulat instytucjonalnego charakteru edukacji”, ale we wszystkich zakłada się, że uczenie się i nauczanie jest dziś w większości krajów zinstytucjonalizowane. Wyliczę tu, dla porządku, te dziewięć postulatów:

1. (*Perspectival tenet*) Postulat historycznej i kulturowej względności interpretacji obserwowanych zjawisk edukacyjnych.

   „Życie w kulturze jest... wynikiem wzajemnego oddziaływania między wersjami świata narzuconymi przez wpływowe instytucje a wersjami, jakie ludzie tworzą w wyniku swoich osobistych historii.... Indywidualne interpretacje świata są nieustannie poddawane ocenie z punktu widzenia tego, co jest uważane za kanon przekonań w otaczającej kulturze. 'Oficjalne' przedsięwzięcie edukacyjne, w sposób nieunikniony kultywuje przekonania, umiejętności i uczucia, które ułatwiają przekazywanie i czynią prawomocnymi interpretacje świata promowane w kulturze, która to przedsięwzięcie sponsoruje." (Bruner, 1996: 14-15)

2. (*The constraints tenet*) Postulat ograniczeń rozumienia świata wynikających z (a) naturalnych ograniczeń funkcjonowania ludzkiego umysłu („native endowment") i (b) ograniczeń stworzonych przez człowieka narzędzi poznania i komunikacji takich jak języki naturalne, systemy notacji symbolicznej, itd. („cultural endowment"). Edukacja musi brać pod uwagę te ograniczenia, jednocześnie wyposażając uczniów w wiedzę, która da im szansę pokonywania tych ograniczeń, „stojąc na ramionach olbrzymów".
3. (*The constructivism tenet*) Postulat kulturowej konstrukcji rzeczywistości. 'Rzeczywistość' świata, w którym żyjemy, jest w dużej mierze uformowana przez tradycje i dostępne w danej kulturze narzędzia poznania i komunikacji.
4. (*The interactional tenet*) Postulat uczenia się poprzez interakcje z innymi, w ramach wspólnot uczenia się.

   Nasza zachodnia kultura nie oddaje sprawiedliwości [temu postulatowi].... Nauczanie wpasowane jest w sztywną formę, gdzie pojedyńczy, przypuszczalnie wszechwiedzący nauczyciel, opowiada lub pokazuje... uczniom coś, o czym oni przypuszczalnie nic nie wiedzą. Nawet jeśli osłabimy nieco ten model, przerywając wykład 'dyskusją' lub czymś w tym rodzaju, to wciąż pozostajemy lojalni niewypowiedzianym zasadom modelu.... Ale jedynie niewielka cześć edukacji człowieka odbywa się w taki jedno-kierunkowy sposób, i jest to prawdopodobnie część najmniej udana. (Bruner, 1996: 20-21).

   Na przeszkodzie zmiany tego stanu rzeczy w kierunku „wspólnot uczenia się" (*learning communities*) stoi, według Brunera, sam fakt instytucjonalizacji edukacji. Bruner wydaje się wierzyć, że model klasy jako „podwspólnoty wzajemnego uczenia się (*subcommunity of mutual learners*), z nauczycielem w roli 'dyrygenta' działań" (ibid.: 21) zapewnia uczenie się wiedzy bardziej wartościowej. Wyniki badań Nadii Hardy sugerują jednak, że, po pierwsze, silnie zinstytucjonalizowany model kształcenia w formie wykładu wcale nie wyklucza powstawania spontanicznych wspólnot uczenia się, i, po drugie, że istnienie tych wspólnot nie zapewnia uczenia się przez uczniów wiedzy bardziej wartościowej.
5. (*The externalisation tenet*) Postulat eksternalizacji wiedzy i sposobów myślenia, wypracowanych we wspólnocie uczenia się, w postaci, na przykład, tekstów,

przedmiotów materialnych czy stron internetowych, które stają się publicznie dostępną (a więc otwartą na krytykę) reprezentacją wiedzy prywatnej. Eksternalizacja przyczynia się do budowy solidarności grupowej, poczucia należenia do wspólnoty. Jednocześnie, indywidualne zdolności członków wspólnoty, ujawnione w pracy nad wspólnymi projektami, pozwalają na podział pracy i bardziej efektywne wykonywanie dalszych projektów. Dzięki eksternalizacji, wiedza może być przekazywana dalszym pokoleniom. (Bruner, 1996: 23) Podobny postulat znajdujemy w teorii „wspólnot praktyki", w związku z pojęciem „reifikacji" (Wenger, 1998).

6. (*The instrumentalism tenet*) Postulat politycznego charakteru edukacji.

   > Edukacja, jakkolwiek bezinteresowna i dekoracyjna by się nie wydawała, zawsze wyposaża absolwentów w umiejętności, sposoby myślenia, odczuwania i mówienia, które mogą oni później wymienić na 'dystynkcje' na zinstytucjonalizowanych 'targowiskach' społeczeństwa. W tym głębszym sensie, zatem, edukacja nigdy nie jest neutralna, pozbawiona społecznych i ekonomicznych konsekwencji...., zawsze jest polityczna.... (Bruner, 1996: 25).

   Edukacja może rozwijać lub tłumić wrodzone zdolności, ale często czyni to wybiórczo: kładąc nacisk na zdolności waloryzowane w danej kulturze, i decydując, jakie zdolności warto lub opłaca się rozwijać w jakich grupach ludzkich, społecznych lub etnicznych. Edukacja dziewcząt w niektórych krajach jest różna od edukacji chłopów. Uważa się też czasami, że edukację należy różnicować względem rasy lub kryteriów społeczno-ekonomicznych, pogłębiając nieraz rasizm i nierówności ekonomiczne i podtrzymując brak wiary w wykształtenie u uczniów pochodzących z niektórych środowisk społecznych.

7. (*The institutional tenet*) Postulat instytucjonalnego charakteru edukacji. Postulat ten zakłada, że „edukacja w krajach rozwiniętych jest zinstytucjonalizowana; wobec tego musi zachowywać się tak jak instytucje, i cierpi na pewne właściwe instytucjom problemy" (Bruner, 1996: 29). Z jednej strony, instytucjonalizacja zapewnia materialne podstawy prowadzenia działalności edukacyjnej; z drugiej, ogranicza ona ją „złożoną siecią mitów, regulaminów, precedensów, sposobów mówienia i myślenia" (ibid.). Ponadto, Bruner podkreśla za Bourdieu (Bourdieu

& Passeron, 1964; Bourdieu, 1994:41), że edukacja stwarza podziały społeczne, przyznając dyplomy jednym, a odmawiając je innym, i uznając niektóre dyplomy za więcej warte od innych.

> Edukacja tkwi po uszy w walce o dystynkcje. Już same nazwy *kształcenie podstawowe*, *średnie*, *wyższe* są tego metaforami.... Istotnie, samo pojęcie merytokracji jest wyrazem oczekiwania, że szkoły zapewnią odpowiedni rozkład dystynkcji w dzisiejszym zbuirokratyzowanym społeczeństwie. (Bruner, 1996: 31)

W kontekście postulatu instytucjonalizacji, Bruner odwołuje się głównie do francuskiego socjologa Pierre Bourdieu, choć wspomina również krytyków politycznych i społecznych aspektów edukacji w innych krajach: Paulo Freire w Ameryce Łacińskiej, Neil Postman w Ameryce Północnej, A.H. Halsey w Wielkiej Brytanii. Zacytuję tu jeden szczególnie reprezentatywny fragment z Bourdieu, gdzie autor opisuje jak dwa typy szkół wyższych we Francji, „les Grandes Ecoles" i „universités" dzielą społeczeństwo w podobny sposób jak niegdyś tytuły szlacheckie poprzez prestiż, którym cieszą się te pierwsze, a którego pozbawione są te drugie.

> Poprzez ustanowienie podziału [studentów we Francji] na studentów 'Grandes Ecoles' i studentów uniwersytetów, instytucja szkolna narzuca podziały społeczne analogiczne do tych, które dawniej oddzielały arystokrację od szlachty, a szlachtę od pospólstwa. Ten podział zaczyna się od egzaminu wstępnego [obowiązującego jedynie w Grandes Ecoles], który ustanawia coś w rodzaju rytualnego cięcia, prawdziwej magicznej granicy między ostatnim przyjętym a pierwszym odrzuconym kandydatem. Różnica między nimi staje się zasadnicza i 'naturalna' i sygnalizuje ona prawo tylko jednego z nich do noszenia tytułu..., należenia do społecznie wyższej rangi, dzięki czemu staje się on prawomocnie predestynowany do dominującej roli w społeczeństwie. (Bourdieu, 1994: 41; przekład mój)

Te dwie instytucje mają wpływ nie tylko na prognozy dotyczące rangi społecznej absolwentów, ale, jak sugerują badania Carine Castela (2004), również na ich wiedzę matematyczną. Na uniwersytecie, studiowanie matematyki zorganizowane jest w formie krótkich, 'samowystarczalnych' (self-contained) kursów dotyczących oddzielnych dziedzin lub tematów matematycznych, kończących się zwykle egzaminem końcowym opartym na zadaniach bardzo podobnych do zadań przerabianych na ćwiczeniach do kursu. Zadania te zwykle nie wymagają długich, wielostopniowych łańcuchów rozumowania i wykorzystywania wiadomości z innych kursów. Wykłady do kursów prowadzone są przez różnych specjalistów, którzy zwykle nie koordynują między sobą tematów i podejść do nauczania, oszczędzając cenny czas na prowadzenie badań matematycznych. Ćwiczenia prowadzą asystenci, których kontakt z wykładowcami zależy od indywidualnego stylu ich pracy. Coś zupełnie odwrotnego dzieje się na kursach matematyki w instytucji zwanej „Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles" (CGPE), która przygotowuje kandydatów do egzaminów wstępnych do Grandes Ecoles. W tych dwuletnich szkołach, studiowanie matematyki odbywa się w ramach dwóch rocznych kursów, z których każdy prowadzony jest przez jednego nauczyciela. O ile na uniwersytecie łączny czas poświęcony na zajęcia z matematyki w ciągu jednego tygodnia zwykle nie przekracza dwóch godzin, to w CGPE tygodniowa liczba godzin matematyki wynosi 16 godzin. Nauczyciel CGPE zwykle nie prowadzi jednocześnie działalności naukowej i zajmuje się wyłącznie nauczaniem, prowadząc uczniów od początku do końca, sprawdzając ich zadawane raz na tydzień prace domowe i egzaminy. Zadania domowe i egzaminacyjne są zwykle wielostopniowe i obejmują całą wiedzę z kursu, a nie tylko jej wycinek. Aby zdać kurs, student musi wypracować sobie skuteczne, ekonomiczne strategie myślenia, oparte na dostrzeganiu związków między pojęciami. Według Castela, to właśnie ta szczególna organizacja nauczania matematyki w instytucji CPGE jest odpowiedzialna za to, że absolwenci tych szkół znacznie lepiej dają sobie radę na egzaminach konkursowych na uzyskanie dyplomu nauczyciela szkół średnich (CAPES, Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second Degré).

8. (*The tenet of identity and self-esteem*) Postulat tożsamości i poczucia własnej godności. Edukacja odgrywa krytyczną rolę w kształtowaniu poczucia własnej tożsamości i godności, zarówno w pozytywnym sensie utożsamiania się z wykształconymi warstwami społeczeństwa i nabywania pewności swojej kompetencji w jakimś zakresie, jak i negatywnym sensie alienacji i poczucia niższej wartości.
9. (*The narrative tenet*) Postulat ważności narracji dla utrzymania spójności kultury i tradycji edukacyjnej. Ponad szkolnymi programami i przedmiotami, edukacja dostarcza ludziom sposobów myślenia i odczuwania, które pomagają im stworzyć – opowiedzieć sobie – wersję świata, w której jest dla nich miejsce.

Instytucjonalne aspekty nauczania i uczenia się matematyki brane były pod uwagę w podstawach teoretycznych dydaktyki matematyki rozwijanych w Niemczech i we Francji w latach 70-tych i 80-tych. W Niemczech perspektywa ta była szczególnie obecna w pracach grupy prowadzonej przez Heinricha Bauersfelda. W programie tych badań, podstawową jednostką analizy była sytuacja interakcji międzyludzkich mająca miejsce w ramach instytucji szkolnej (Bauersfeld, 1980). Teoretyczne podstawy odwoływały się do interakcjonizmu symbolicznego, a metodologia była bliska etnometodologii stosowanej w pracach Ervinga Goffmanna. Uczniowie Bauersfelda obserwowali i filmowali setki lekcji matematyki w szkołach podstawowych, a następnie analizowali je, wyszukując powtarzających się schematów interakcji między nauczycielami a uczniami i oceniając wartość epistemologiczną wiedzy matematycznej, którą uczniowie w toku tych interakcji zdobywali. Badania te zaowocowały takimi dziś rozpowszechnionymi pojęciami jak „funnel pattern" (schemat lejkowy) czy „socio-mathematical norms" (normy socjo-matematyczne). Inspirację Goffmanowską odnajdujemy także w pojęciu „umowy dydaktycznej" Brousseau, na co zwracał uwagę Bernard Sarrazy.

W badaniach Bauersfelda i jego uczniów, obserwowane i analizowane lekcje nie były realizacjami projektów dydaktycznych badaczy, lecz zwykłymi szkolnymi lekcjami prowadzonymi przez zwykłych nauczycieli. Chodziło o opisanie konstrukcji wiedzy matematycznej w rzeczywistych warunkach szkolnych, a nie o testowanie projektów opartych na ideałach czy normatywnych teoriach nauczania.

Testowanie projektów dydaktycznych (inżynieria dydaktyczna) należało natomiast do programu związanego z Teorią Sytuacji Dydaktycznych (*Théorie des Situations Didactiques, TSD*) rozwijanej we Francji od końca lat siedemdziesiątych przez Brousseau i jego uczniów i współpracowników (Brousseau, 1997). Ale program ten miał przede wszystkim ambicję zbudowania teorii nauczania matematyki w klasie szkolnej; ujawnienie mechanizmów tego procesu, wyjaśnienie ich. Jednostką analizy w tej teorii jest tzw. „relacja dydaktyczna" zawiązująca się, w toku jednej lub kilku lekcji, między nauczycielem, uczniem i zakładaną przez program szkolny wiedzą matematyczną.

Rozwijana we Francji niemal jednocześnie teoria, którą dziś nazywamy Antropologiczną Teorią Zjawisk Dydaktycznych (*Théorie Anthropologique du*

Didactique, TAD; Chevallard, 1999), wychodzi poza klasę szkolną i obejmuje bardzo szeroki zakres zjawisk zinstytucjonalizowanego kształcenia matematycznego. Teoria ta próbuje wykryć, opisać i wyjaśnić ogólne zasady decydujące o tym, jaką wiedzę uznaje się za nadającą się do nauczania w szkole, za pożądaną do nauczania w szkole, i o sposobach jej nauczania. Jest to teoria praktyki nauczania matematyki w instytucjach szkolnych.

Obie teorie (TSD i TAD) inspirowały się teoriami zorganizowanej działalności ludzkiej powstałymi w socjologii i naukach politycznych. Głównym źródłem dla Brousseau była popularna książka Crozier & Friedberg (1980), reprezentująca kierunek zbliżony do Teorii Racjonalnego Wyboru w teorii instytucji. Chevallard natomiast zapożyczał idee z kilku różnych źródeł, używając czasami języka ekonomii działania jednostki charakterystycznego dla Teorii Racjonalnego Wyboru (Peters, 1999) z jej modelami opartymi na teorii gier, ale także odwołując się do myśli socjologicznej Althussera, podkreślającej rolę ideologii, rytuału, zwyczaju i poczucia zobowiązania wobec instytucji, której się jest podmiotem, bardziej niż racjonalnego wyboru w społecznych zachowaniach ludzi.

Jednym z istotnych źródeł Chevallarda, szczególnie w teorii transpozycji dydaktycznej, była mało znana praca Verreta (1975), która określała warunki, które musi spełniać wiedza, aby można było jej nauczać w szkole – nazwijmy ją, z braku lepszego określenia, „wiedzą nauczalną w szkole” (*savoirs scolarisables*). Według Verreta (1975: 146-147), wiedza nauczalna w szkole musi być:

- Jawna: musi być możliwe podanie jej treści i znaczenia w sposób jawny; nie może to być wiedza nie dająca się określić słownie;
- Publiczna („zinstytucjonalizowana”, jakby powiedział Brousseau): nie może to być osobiste, prywatne, doświadczenie nauczyciela lub ucznia, lecz wiedza uznana społecznie za prawdziwą lub sprawdzoną i ważną dla wykształcenia ogólnego, specialistycznego lub zawodowego;
- Podzielna na dobrze określone partie materiału teoretycznego dającego się powiązać z ćwiczeniami lub zadaniami pozwalającymi opanowanie tego materiału pogłębiać i poddawać próbie;

- Programowalna: musi być możliwe zaplanowanie nauczania tej wiedzy w postaci ciągu lekcji, prac domowych i egzaminów w rytmie okresów, semestrów i lat.
- Testowalna: wiedzę nauczalną w szkole powinno się dać mierzyć za pomocą standardyzowanych testów, dających podstawę do nadawania dyplomów potwierdzających nabytą ekspertyzę.

Wiedza, która nie spełnia tych warunków, a zostaje wymieniona w programach szkolnych, budzi duże wątpliwości nauczycieli. Tak się dzieje, na przykład, w Québec'u, gdzie nowe programy szkolne zostały sformułowane w terminach 'kompetencji'. Nauczyciele nie wiedzą, jak tych kompetencji uczyć, gdyż wiele z nich nie daje się (łatwo) przełożyć na słowa i definicje, procedury czy obserwowalne czynności. Nauczyciele nie wiedzą, jak mierzyć stopień osiągnięcia kompetencji. Niektóre kompetencje są transwersalne – mają być nabywane na zajęciach ze wszystkich przedmiotów. Inne są bardziej specyficzne dla konkretnych przedmiotów, na przykład – dla matematyki. Dla szkoły średniej, program wymienia dziewięć kompetencji transwersalnych i trzy kompetencje specyficzne dla matematyki. Oto kompetencje transwersalne:

1. Wykorzystuje informacje
2. Rozwiązuje problemy
3. Ocenia krytycznie
4. Jest twórczy/a
5. Stosuje skuteczne metody pracy
6. Wykorzystuje informatykę
7. Pracuje do granic swoich możliwości
8. Współpracuje z innymi
9. Komunikuje w sposób właściwy

Nietrudno zrozumieć dlaczego nauczyciele protestują przeciwko takiemu sformułowaniu programów szkolnych. Istotnie, jest bardzo trudno zdecydować, czy uczeń pracuje do granic swoich możliwości, gdyż indywidualnych możliwości nie da się zmierzyć. W związku z kompetencją pierwszą, czy mamy nagradzać ucznia, który świetnie potrafi korzystać z podpowiedzi? Albo – w związku z kompetencją ósmą – czy podanie ściągi, to jest objaw współpracy z innymi? Wiedza tego rodzaju nie da się rozpisać na teorię i ćwiczenia, ciąg lekcji i klasówkę.

Kompetencje specyficzne dla matematyki także nie przekładają się łatwo na sposoby nauczania i oceniania:

1. Wykorzystuje rozumowanie matematyczne.
2. Rozwiązuje problem sytuacyjny.
3. Komunikuje wykorzystując język matematyki.

Nauczyciele narzekają na brak precyzyjnego i operacyjnego określenia „rozumowania matematycznego". Narzekają też na konieczność wymyślania problemów sytuacyjnych ad hoc, gdyż mają to być problemy wynikające z problemów dnia codziennego, informacji w prasie, jakiegoś wydarzenia w danej dzielnicy, itd. Wymyślanie takich zadań zabiera czas; nie można po prostu zadać zadanie numer 9 z podręcznika, które jest sprawdzone, wiadomo, że nie zawiera sprzeczności i odpowiedź jest podana albo w samym podręczniku, albo w przewodniku dla nauczyciela.

Warunki „nauczalności" wiedzy są tylko jednym ze zjawisk charakterystycznych dla edukacji zinstytucjonalizowanej. Mówię o tych zjawiskach w następnej części wykładu.

ZJAWISKA INSTYTUCJONALNE

W literaturze socjologii edukacji (patrz artykuły w czasopismach *Sociology of Education*, *American Journal of Sociology*, *Journal of Theoretical Politics*) można znaleźć opisy zjawisk instytucjonalnych, które mają znaczenie dla naszego rozumienia problemów nauczania matematyki i projektowania dydaktycznego. Wymienię tu kilka z tych zjawisk.

1. Działanie instytucjonalne jest działaniem planowym, narzucającym dość sztywne struktury czasowe na osiąganie określonych celów.
2. Rozdział między sferą produkcji a sferą administracji w instytucjach. (*Decoupling*)
3. Ignorowanie obiektywnych warunków niezbędnych dla realizacji pewnych planowanych w instytucji działań jest czasami warunkiem koniecznym zaangażowania się członków instytucji w te działania.
4. Działanie oparte na logice *zachowania właściwego* raczej niż na logice *wnioskowania*

5. Zasada ekonomii działania instytucjonalnego.
6. Izomorfizm.
7. Prawo nadawania jednostkom pozycji w hierarchiach społecznych i zawodowych; tworzenie tych hierarchii przez instytucje. (*Allocative power*)

A oto kilka uwag na temat każdego z tych zjawisk.

Uwagi na temat zjawiska 1) Działanie instytucjonalne jest działaniem planowym, narzucającym dość sztywne struktury czasowe na osiąganie określonych celów.

Objawem tego zjawiska w dziedzinie edukacji zinstytucjonalizowanej są programy szkolne, które w latach 1960-tych i 70-tych stały się przedmiotem badań socjologów. Wyłonił się nowy kierunek badań, „nowa socjologia edukacji”:

> Socjolodzy zaczęli widzieć programy szkolne jako coś więcej niż organizację wiedzy szkolnej... Podjęli systematyczne badania programów jako zorganizowanego i skodyfikowanego odbicia interesów społecznych i ideologicznych.... To podejście... było ugruntowane w tradycji socjologii wiedzy... [rozwijanej w pracach] Marx’a i Engelsa,... Manheim’a..., i Durkheim’a... i zastosowane do rozumienia programów szkolnych jako konstrukcji społecznej i politycznej. Z perspektywy nowej socjologii, programy szkolne nie były już neutralne z punktu widzenia wartości; stały się problematyczne i domagały sie krytycznej i ideologicznej analizy. (Sadovnik, 1991)

Jednym z bardziej znanych przedstawicieli tej nowej fali w socjologii edukacji był Basil Bernstein (Bernstein, 1970; 1971; 1977). Prace Bernsteina – przez pewien czas bardzo krytykowane w Wielkiej Brytanii – ostatnio powracają do łask i budzą zainteresowanie brytyjskich dydaktyków matematyki (zob. np. Lerman, 2001).

Bernstein próbował opisać prawa rządzące praktyką pedagogiczną. Na przykład, Bernstein twierdził, że istnieją cztery typy reguł wyznaczających wewnętrzną logikę tej praktyki (Bernstein, 1990; Sadovnik, 1991: 54):

- reguły hierarchii, czyli zachowania odpowiedniego do pozycji w szkole (inne dla nauczyciela, inne dla uczniów; różne dla uczniów klas starszych i młodszych, itd); reguły te przekazują pewien „porządek społeczny” w szkole i często są odzwierciedleniem porządku społecznego w skali kraju czy kultury;
- reguły podziału materiału nauczania na sekwencje tematów i lekcji oraz tempa realizacji tych sekwencji (*rules of sequencing and pacing*);
- reguły kryteriów określające, co jest właściwe (*legitimate*) a co nie w procesie edukacyjnym;

- reguły dekontekstualizacji, czyli reguły przekładu wiedzy osobistej, uzyskanej w toku badań lub doświadczeń jednostki (naukowca, ale także nauczyciela lub ucznia) na wiedzę „nauczalną w szkole”.

Bernstein nie poświęca wiele uwagi regułom dekontekstualizacji, gdyż są one ściśle związane z konkretnymi treściami nauczania, a Bernstein mówi o zasadach praktyki szkolnej niezależnych od specyfiki przedmiotów nauczanych w szkole. Skupia uwagę na „relacji pedagogicznej”, czyli relacji między nauczycielami a uczniami, abstrachując od tematycznej treści tych relacji. Reguły dekontekstualizacji są natomiast w centrum uwagi dydaktyków matematyki, dla których jednostką analizy jest relacja dydaktyczna, czyli system wzajemnych oddziaływań między nauczycielami, uczniami i matematycznymi treściami nauczania. Pojęcia „transpozycji dydaktycznej” i „instytucjonalizacji wiedzy” występujące w pracach Brousseau (1997) i Chevallarda (1985; 1999) są zasadniczymi elementami teorii procesów dekontekstualizacji wiedzy matematycznej w konteście nauczania matematyki w instytucji szkolnej.

Wpływ socjologii instytucji w ogóle i socjologii edukacji w szczególności na teorie wypracowane przez Brousseau (TSD) i Chevallarda (TAD) wydaje się dość oczywisty, choć autorzy ci są dość powściągliwi jeśli chodzi o źródła inspiracji i nie czynią dość wysiłków by wyjaśnić związki i różnice między ich teoriami, a teoriami wypracowanymi w socjologii edukacji. A szkoda, gdyż znajomość szerszego tła teorii TSD i TAD z pewnością ułatwiłaby ich zrozumienie. Wspomniałam już wyżej o związkach między pojęciem relacji pedagogicznej Bernsteina a pojęciem relacji dydaktycznej Brousseau; między pojęciem reguł dekontekstualizacji Bernsteina a pojęciem instytucjonalizacji Brousseau. Ale istnieje też oczywisty związek między pojęciem reguł podziału materiału nauczania na sekwencje tematów i lekcji oraz tempa ich realizacji u Bernsteina, a pojęciami topogenezy i chronogenezy wiedzy szkolnej u Chevallarda. Istnieją też zbieżności w terminologii, które dopraszają się o wyjaśnienie, na przykład: „situation d’action” Brousseau, „action situation” w modelu instytucji w naukach politycznych (Ostrom, 2005); „contrat didactique” Brousseau i „contrat de production” Crozier & Friedberg (1980).

Uwagi na temat zjawiska 2) Rozdział między sferą produkcji a sferą administracji w instytucjach (Decoupling)

W socjologii instytucji często zakłada się, że w ich działaniu można wyróżnić dwie sfery: sferę produkcji (*technical activity*), która produkuje to, do czego instytucja została powołana (na przykład, uczelnia wyższa produkuje dyplomowanych absolwentów i wyniki naukowe, wobec tego sfera produkcji obejmuje nauczanie i prowadzenie badań naukowych), oraz sferę administracji (*institutional activity*), która rekrutuje nowych członków i przypisuje ich do różnych ról w działalności produkcyjnej lub administracyjnej, a także reguluje, uzasadnia i uprawomocnia istnienie instytucji jako całości (Meyer, Scott & Deal, 1983). Zjawisko „decoupling" polega na tym, że to co się dzieje na poziomie „warsztatu" (klasy, pracy naukowej) ma niewiele wspólnego z deklaracjami ideologicznymi, polityką i działalnością administracji, której to nie interesuje. Ponadto, zatajenie rozbieżności może być traktowane jako warunek samego istnienia instytucji jako całości. Według cytowanych autorów, zjawisko „decoupling" jest cechą wszelkich zcentralizowanych systemów edukacji: „dużo uwagi poświęca się na zachowywanie pozorów zgodności ze standardowymi kategoriami systemu edukacji, niewiele zaś wysiłku wkłada się w sterowanie i koordynację działań dydaktycznych" (ibid., p. 49).

Zjawisko „decoupling" tłumaczy fakt, że „reformy" szkolne objawiają się przede wszystkim nowym językiem dyskursu ideologicznego i powierzchownymi zmianami organizacyjnymi, podczas gdy zmiany treści i metod nauczania na poziomie klasy są niewielkie. Wszelkie trwałe zmiany na poziomie klasy wymagają ścisłej kooperacji między nauczycielami i wypracowania przez nich wspólnych norm i strategii działania, dostatecznie rutynowych i jawnych, aby powstawały zinstytucjonalizowane reguły działania. Wymagają więc one (tzn., zmiany na poziomie klasy) ingerencji administracji w pracę na poziomie „warsztatu" tak, aby kooperacja między nauczycielami była możliwa (na przykład, aby nauczyciele mieli na nią czas) i konieczna dla osiągnięcia podstawowych celów nauczania.

Zjawisko „decoupling" wróciło w ostatnich latach na forum dyskusji w kontekście krytyki kursów online (Cox, 2005). Mimo braku dowodów na skuteczność tych kursów, a nawet wbrew istnieniu dowodów małej ich skuteczności, administratorzy college'ów amerykańskich (*Community Colleges*) powtarzają slogany o przyszłości „e-learning", o społecznych korzyściach kształcenia „dostępnego dla każdego, gdziekolwiek by był" (ibid.). Instytucje edukacyjne przeznaczają znaczne fundusze na rozwijanie kursów online, twierdząc, że kursy te przyczynią się znacznie do spełnienia ich misji. I tu jest paradoks, ponieważ studenci, dla których Community Colleges zostały stworzone, to ludzie ze środowisk biednych i słabo wykształconych, w których student może nie mieć dostępu do potrzebnej technologii, a jeśli nawet ma ten dostęp, to może to być jedyny jego kontakt ze światem myśli naukowej. Brak dostępu do literatury i możliwości bezpośredniego podyskutowania na tematy, które studiuje, może znacznie obniżyć poziom jego rozumienia przedmiotu studiów. Z drugiej jednak strony, jeśli dany Community College postanowi nie inwestować w kursy online, a sąsiednie tego rodzaju instytucje będą inwestować, to College może stracić swój prestiż, a co za tym idzie studentów i zostać zmuszony do zamknięcia swoich podwoi. Stąd, dla zachowania swojego istnienia, Community Colleges muszą podporządkować się prawu „decoupling" i przymykać oczy na to, co się naprawdę w kursach online dzieje.

Uwagi na temat zjawiska 3: Ignorowanie obiektywnych warunków niezbędnych dla realizacji pewnych planowanych w instytucji działań jest czasami warunkiem koniecznym zaangażowania się członków instytucji w te działania.

Na zjawisko to zwraca uwagę Chevallard (1985: 81) w kontekście mitu współzbieżności procesów nauczania i uczenia się. Nauczanie zinstytucjonalizowane zakłada tzw. „fikcję czasu dydaktycznego" (ibid.): czas przeznaczony w programie szkolnym na nauczanie pewnej wiedzy matematycznej jest wystarczający dla jej przyswojenia przez ucznia. Uczeń, który w zadanym czasie nie spełnia tego oczekiwania zostaje oceniony jako uczeń powolny, nieuważny, leniwy, niezdolny, itd. W żadnym razie liczba uczniów nie spełniających oczekiwań nie podważa fikcji czasu dydaktycznego. Jeśli procent takich uczniów przekracza pewne granice tolerancji (różne w różnych systemach edukacyjnych lub kulturach) to zmienia się wymagania egzaminacyjne (np. nieco prostsze zadania), lub „odchudza" nieco program, ale nie rezygnuje się z mitu. Rezygnacja z mitu wymagałaby obalenia struktury edukacji w takiej formie, w jakiej ona dzisiaj istnieje, z jej podziałem na klasy według wieku uczniów, definiowaniem wieku w terminach teoretycznych norm rozwoju umysłowego, i ocenianiem uczniów za pomocą pisanych, krótkich testów.

Uwagi na temat zjawiska 4: Działanie oparte na logice zachowania właściwego raczej niż na logice wnioskowania

Z persektywy instytucjonalizmu opartego na teorii Racjonalnego Wyboru o instytucjach zakłada się, że są one zaplanowane są zgodnie z zasadą maksymalnej osobistej korzyści. Grupa uczestników instytucji osiąga consensus w sposób, który daje się przewidzieć modelując sytuację, działanie i wybory uczestników w terminach teorii gier, w oparciu o rachunek indywidualnych zysków i strat. Teoretycy „instytucjonalizmu normatywnego" twierdzą natomiast, że działanie instytucji opiera się bardziej na logice zachowania właściwego (*logic of appropriateness*) niż na logice wnioskowania (*logic of consequentiality*) z rachunku osobistych zysków i strat (Peters, 1999: 32). Założenie to jest typowe dla myśli socjologicznej Emile'a Durkheima, jak twierdzi Mary Douglas (1986) w książce „How institutions think"[3].

> Klasyfikacje, operacje logiczne, i sugestywne metafory są jednostce dane przez społeczeństwo. Przede wszystkim, poczucie słuszności a priori pewnych idei i nonsensowność innych są jednostce podane jako część środowiska społecznego. [Według Durkheima] reakcja oburzenia kiedy tylko utarte sądy zostają przez kogoś podważone jest bezpośrednim skutkiem głębokiego i niewysłowionego poczucia przynależności do pewnej grupy społecznej. (Douglas, 1986: 10)

Ustalone poglądy na temat tego, jakie zachowanie jest „właściwe", a jakie nie, powstają w wyniku procesów rutynizacji i rytualizacji zachowań, odgrywających ogromną rolę w społeczeństwie zorganizowanym, na co zwracał uwagę Erving Goffmann (Goffman, 1967: 43; patrz także Powell & DiMaggio, 1991).

To między innymi zjawisko logiki zachowania właściwego pozwala zrozumieć dlaczego studenci pozostawiają decyzję o poprawności swoich rozwiązań zadań matematycznych nauczycielowi i nie są w stanie sami ocenić czy ich rozwiązanie jest poprawne czy nie (Sierpinska, Bobos & Knipping, 2008). Studenci wiedzą, że poprawność rozwiązania nie zależy jedynie od kryteriów czysto matematycznych, lecz także od kryteriów „rozwiązania sensownego", napisanego z użyciem „właściwego"

[3] Książka ta jest jednym z niewielu źródeł z dziedziny socjologii instytucji, które są cytowane w pracach Chevallarda.

języka, z „właściwym” poziomem szczegółów, które to kryteria mogą być stosowane przez danego nauczyciela w ocenie pracy studenta.

Instytucje matematyczne (na przykład, nauczanie matematyki w szkole, badania w dziedzinie nauk matematycznych prowadzone na wydziałach matematyki, na wydziałach inżynierii, wykorzystywanie modeli matematycznych w przemyśle) różnią się normami i kryteriami zachowania właściwego, a to pociąga za sobą różnice w poglądach na naturę aktywności matematycznej i jakości jej wyników. Każda instytucja ma inne zadania matematyczne do wykonania i inne kryteria oceny, czy zadanie zostało zadowalająco wykonane.

Uwagi do zjawiska 5: Zasada ekonomii działania instytucjonalnego

Rachunek ekonomii działania ma szczegolne miejsce w instytucjonalizmie opartym na teorii Racjonalnego Wyboru, ale w każdej teorii zakłada się przynajmniej, że

> Instytucje powstają i trwają o ile zapewniają one zyski większe niż koszty tranzakcji (tzn. koszty negocjacji, egzekucji i przestrzegania umowy).... Strony w wymianie pragną zaoszczędzić na kosztach tranzakcji w świecie, gdzie informacja jest kosztowna, niektórzy ludzie zachowują się oportunistycznie a racjonalność jest ograniczona.... Instytucje zmniejszają niepewność dostarczając skutecznych i wiarygodnych ram dla wymiany ekonomicznej. (Powell & DiMaggio, 1991: 4).

Spróbujmy zastosować zasadę ekonomii działania instytucji do sytuacji nauczania matematyki w ramach kursów „wyrównawczych” oferowanych na uniwersytetach północno-amerykańskich (pre-requisite mathematics courses, patrz Sierpinska et al., 2008). Celem nauczyciela jest wymiana wykładu treści matematycznych na zaangażowanie studentów w naukę tych treści w sytuacji, gdzie studenci nie są pewni czego nauczyciel oczekuje od nich, a nauczyciel nie jest pewny czy studenci rozumieją to o czym mówi i czy są tym zainteresowani, biorąc pod uwagę fakt, że starają się oni dostać na kierunki inne niż matematyka (np. Szkoła Handlowa, Psychologia). Niektórzy studenci chcą tylko zdać kurs, kosztem jak najmniejszego wysiłku z ich strony; ci zwykle często dopytują się, co będzie na egzaminie końcowym i co wystarczy wiedzieć, aby ten egzamin zdać. Aby zmniejszyć niepewność a jednocześnie nie podwyższyć kosztów (wysiłku) nauczania i uczenia się, instytucja narzuca sztywne programy nauczania na tych kursach, a egzaminy końcowe niewiele się zmieniają z roku na rok i oparte są na tych samych, rutynowych typach zadań.

Chevallard odwołuje się do zasady ekonomii (*économie du système didactique*) wyjaśniając przyczyny, dla których niektóre pojęcia matematyczne wprowadzane są do programów szkolnych a inne nie (Chevallard, 1985: 49). Odwołuje się do niej także gdy mówi o „sytuacji tranzakcji" (*situation transactionnelle*) w kontekście fikcji czasu dydaktycznego: w tej sytuacji mit współzbieżności czasu nauczania i czasu uczenia się jest ceną jaką trzeba zapłacić w zamian za istnienie wiedzy szkolnej jako instytucji, a więc jako wiedzy, której nauczanie daje się zaprogramować, a uczenie się sprawdzać za pomocą testów.

Uwagi na temat zjawiska 6: Izomorfizm

Socjologowie instytucji (Meyer & Rowan, 1977; Zucker, 1987) stwierdzają, że organizacje zinstytucjonalizowane mają tendencję do upodabniania się do siebie. Czasami jest to, jak pisze Zucker (1983: 449) wynikiem ograniczeń środowiskowych i kulturowych, czasami przyczyną jest wzajemne uzależnienie instytucji tak, że trudno jest zmienić jakiś element jednej instytucji bez jednoczesnej zmiany odpowiednich elementów innej instytucji. Zucker (ibid.) podaje przykład decyzji zastąpienia ocen w postaci procentów przez oceny w postaci słownych opisów osiągnięć i poziomu wiedzy studentów college'u. Aby ta decyzja mogła być wprowadzona w życie, uniwersytety i szkoły zawodowe musiałyby zmienić reguły przyjęć oparte dotąd na ustanowieniu progu wartości numerycznej średniej ocen.

Uwagi na temat zjawiska 7: Prawo nadawania jednostkom pozycji w hierarchiach społecznych i zawodowych; tworzenie tych hierarchii przez instytucje. (*Allocative power* lub „siła przeznaczenia (funduszów)")

Instytucje „stwarzają kategorie społeczne [na przykład, „lekarz", „pacjent"; „nauczyciel", „student"], które są następnie definiowane jako fakt. Przypisanie do [kategorii społecznej] zmienia szanse życiowe i ich postrzeganie, a także określa możliwe alternatywy działania." (Zucker, 1987: 449). Instytucje tworzą także nowe kategorie wiedzy, która staje się wiedzą specjalistyczną. Na przykład, otworzenie odrębnego wydziału na uniwersytecie dla nauczania i badań związanych z maszynami liczącymi zinstytucjonalizowało „informatykę" (computer science) jako wiedzę akademicką, w dziedzinie której uniwersytet uzyskał prawo do przyznawania stopni akademickich, co doprowadziło do stworzenia nowych kategorii społecznych (np. doktór informatyki).

Instytucje, dzięki temu prawu, tworzą też hierarchie społeczne. Meyer (1977: 61) stwierdza, że nawet zróżnicowanie programów w tej samej instytucji może mieć wielki wpływ na przyszłość studentów, większy niż to, czego w istocie się nauczą. Okazuje się, że w szkołach amerykańskich, studenci w programach przygotowujących do wstępu do college'u mieli większe oczekiwania i aspiracje niż studenci w programach zawodowych, niezależnie od swoich osiągnięć i stopni.

RAMY TEORETYCZNE PRZYDATNE W BADANIACH Z PERSPEKTYWY INSTYTUCJONALNEJ

W dydaktyce matematyki, teorią może najbardziej świadomie przyjmującą perspektywę instytucjonalną na procesy nauczania i uczenia się matematyki jest Antropologiczna Teoria Zjawisk Dydaktycznych, w której istotne miejsce zajmuje pojęcie prakseologii (TAD: Chevallard, 1999). Według TAD, przedmiotem badań dydaktyki matematyki jest zinstytucjonalizowana działalność matematyczna człowieka, mająca na celu produkcję, stosowanie, organizację i nauczanie matematyki. Ale nawet w tej teorii, samo pojęcie instytucji jest traktowane jak pojęcie potoczne: „wszyscy wiemy, o czym mówimy". Nie jest jasne, kiedy można uznać, że dane działanie jest „zinstytucjonalizowane". Nie we wszystkich badaniach odróżnienie działań zinstytucjonalizowanych od innych działań jest istotne. Okazało się ono jednak ważne w badaniach źródeł frustracji studentów kursów wyrównawczych, które prowadziłam z Georgeaną Bobos i Christine Knipping (Sierpinska, Bobos & Knipping, 2008), a także w pracy doktorskiej mojej studentki, Nadii Hardy (2009)[4], o której szerzej opowiem w dalszej części wykładu.

Chevallard woli twierdzić, że „instytucja" jest „pojęciem pierwotnym" w jego teorii (Chevallard, 1992: 144-145) i opisuje to pojęcie pośrednio poprzez własności, jakie posiada:

> [D]ydaktyka należy do dziedziny antropologii umiejętności (lub antropologii poznawczej).... [W]szystko jest przedmiotem. Ale wyróżniamy... szczególne typy przedmiotów: *instytucje*, *jednostki* i *pozycje*, jakie zajmują jednostki w instytucjach. Zajmując te pozycje, jednostki stają się *podmiotami* instytucji – podmiotami aktywnymi, które przyczyniają się do życia instytucji przez sam fakt podlegania jej. Umiejętności – i wiedza jako pewna forma organizacji umiejętności – [są określane z użyciem] pojęcia

[4] http://www.nadiahardy.com

stosunku: przedmiot istnieje o tyle, o ile istnieje jakiś stosunek do tego przedmiotu, to znaczy jeśli jakiś podmiot lub instytucja (roz)poznaje go jako przedmiot. Mając dany pewien przedmiot (na przykład, przedmiot wiedzy) i pewną instytucję, pojęcie stosunku odnosi się do realizowanych w instytucji praktyk socjalnych związanych z tym przedmiotem, czyli do 'tego, co się w danej instytucji robi z tym przedmiotem'. *Znać* przedmiot to mieć coś do zrobienia – i często mieć do czynienia – z tym przedmiotem. (Bosch & Chevallard, 1999: 83).

Z odniesień do Althussera (1976: 121-137) w „Transposition Didactique" Chevallarda (1985) w związku z pojęciem „podmiotu" (*sujet*) i interpelacji jednostki jako podmiotu (*interpellation en sujet*), oraz wyraźny wpływ Althussera w traktowaniu „Szkoły" („Ecole" przez duże E) jako części aparatu ideologicznego państwa (Althusser, 1976: 110), a także w użyciu funkcji „rozpoznawania/uznawania" (*reconnaissance*, Althusser, ibid.: 124) w określeniu pojęcia przedmiotu, możemy domyślać się, jakie znaczenie Chevallard przypisuje tym podstawowym pojęciom.

Chevallard interesuje się prawie wyłacznie wiedzą matematyczną jako praktyką specyficzną dla danej instytucji, głównie szkolnej. Zasadniczym elementem teorii ATD jest pewna metoda analizy *wiedzy matematycznej, rozpoznane j i uznanej przez instytucję szkolną jako przedmiot nauczania* (WM-S), w terminach *praktyk socjalnych* związanych z tym przedmiotem, czyli 'tego, co się w szkole z tym przedmiotem robi' (parafrazując cytowane wyżej słowa Bosch & Chevallard, 1999: 83). Zakładając, że „wiedza" (*savoir*) to „pewna forma organizacji umiejętności (*connaissances*)" (ibid.), oraz, za Brousseau (1997), że „sens umiejętności matematycznych można uchwycić jedynie za pośrednictwem... problemów, które pozwalają one rozwiązać" (ibid.: 81), Chevallard postuluje, że WM-S istnieje, o ile istnieją w danej instytucji szkolnej problemy (zadania), które pozwala ona rozwiązać. Wobec tego, podstawowym elementem „praktyk socjalnych" określających daną WM-S są zadania (*tâches*), w rozwiązaniu których ta wiedza jest potrzebna lub przydatna.

Ale same zadania nie tworzą jeszcze praktyki. Praktyka to działania powtarzające się, rutynowe. Praktyka dzieli zadania na typy i dla każdego *typu zadań* dysponuje dobrze określoną *techniką*, którą można stosować rutynowo. Praktyka może również wypracować ramy pojęciowe pozwalające uzasadnić poszczególne techniki (tzw. „*technologię*"), a także *teorię* uzasadniającą technologię i jej wybór. Opis danej WM-S w terminach praktyki z nią związanej Chevallard nazywa „prakseologią" (Bosch & Chevallard, 1999; Chevallard, 1999).

Opisywanie instytucjonalnego nauczania matematyki w terminach prakseologii zostało zastosowane w kilku już projektach badawczych w dydaktyce matematyki (np. Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005; Bergé, 2007; Hardy, 2009). Badania Barbé et al. (2005) i Bergé (2007) zwracały uwagę jedynie na aspekty matematyczne tej wiedzy, zwykle już jawne i „rozpoznawalne" jako przedmioty przez instytucje matematyki naukowej lub matematyki szkolnej. Jednak w badaniach źródeł frustracji na kursach wyrównawczych z matematyki (Sierpinska, Bobos & Knipping, 2008), trzeba było brać pod uwagę wiele takich aspektów sytuacji przeżywanych przez studentów, które należały do słabo zinstytucjonalizowanych sfer działania instytucji tych kursów. Na przykład, interakcje studentów z wykładowcami lub z administracją rządzą się niepisanymi normami zachowania właściwego bardziej niż skodyfikowaną w postaci teorii wiedzą matematyczną czy regulaminem studiów.

Także w pracy Nadii Hardy (2009), której tematem było opisanie wyobrażeń studentów pewnego college'u na temat wiedzy do opanowania w związku z pojęciem granicy funkcji, okazało się, że modelowanie tych wyobrażeń w terminach prakseologii czysto matematycznych nie chwyta bardzo istotnych specyficznych ich cech. Okazało się także, że ważny wpływ na charakter wyobrażeń mają pewne niepisane instytucjonalne (ale nie *zinstytucjonalizowane*) normy, decydujące, między innymi, o wyborze funkcji w zadaniach na granice na egzaminach i preferowanym sposobie ich rozwiązywania.

Potrzebna była nam więc taka teoria instytucji, która odróżniałaby elementy bardziej i mniej zinstytucjonalizowane instytucji, a jednocześnie zawierała ramy teoretyczne przydatne w analizie praktyk nauczania i uczenia się matematyki. W pracy nad frustracją na kursach wyrównawczych z matematyki (Sierpinska, Bobos & Knipping, 2008), zaproponowałyśmy pewne połączenie teorii TAD z teoriami instytucji stosowanymi w naukach politycznych i w socjologii (Ostrom, 2005; Crozier & Friedberg, 1980). Ostrom, w szczególności, zaproponowała ramy teoretyczne dla systematycznej analizy instytucji (Institutional Analysis and Development framework IAD, Ostrom, 2005), które określają zasadnicze elementy struktury dowolnej instytucji i ściśle odróżniają jej warstwę silnie zinstytucjonalizowaną (warstwa przepisów) od warstwy słabo zinstytucjonalizowanej (warstwa norm i strategii). Hardy zaadaptowała następnie te ramy w swojej pracy.

Określiłyśmy (w Sierpinska, Bobos & Knipping, 2008) instytucję jako „działanie kolektywne”, będące strukturalną częścią systemu innych tego rodzaju działań. O działaniu zakłada się, że jest celowe, narzucone jako obowiązkowe oraz uregulowane.

Celowość działania wynika z założenia, że społeczeństwo tworzy instytucje dla osiągnięcia pewnych celów, uzyskania pewnych *wyników* (*outcomes*, Ostrom, 2005) lub wykonania pewnych zadań (*tâches*, Chevallard, 1999).

Instytucja egzekwuje wykonanie planowanego działania przez określenie sankcji za uchylanie się od obowiązku, oraz za nieprzestrzeganie przepisów. Instytucje są bowiem tworami społecznymi, nie zjawiskami naturalnymi (Crozier & Friedberg, 1980: 97). Są one wynikiem świadomego społecznego i legislacyjnego wysiłku, a nie tylko spontanicznym działaniem, które, w wyniku tradycji, zostało uznane za „naturalne”, „normalne” czy „rutynowe”. Nie każda praktyka społeczna jest instytucją. Na przykład, uczenie się przy okazji uczestniczenia we wspólnych zajęciach gospodarskich rodziny nie jest instytucją dopóki społeczeństwo nie wyróżni tego uczenia się jako doświadczenia obowiązkowego dla dzieci i nie nałoży sankcji na rodziców nie włączających dzieci w te zajęcia.

Oficjalnie, regularyzacja działań w instytucji zachodzi za pośrednictwem podziału pracy (wydziały, stanowiska, itd), koordynacji działań (plany roczne, rozkłady zajęć, itd) oraz specjalistycznego języka lub „dyskursu” służącego do formułowania, uzasadniania i przekazywania zasad funkcjonowania instytucji. Język ten umożliwia jawne wyrażenie przepisów i sankcji za ich niewykonanie; jest on też niezbędny do zdefiniowania i uzasadnienia warunków, które muszą być spełnione, aby można było uznać, że cel został osiągnięty, lub zadanie – wykonane. Dzięki niemu możliwe staje się przekazywanie zasad funkcjonowania instytucji nowym uczestnikom i reszcie społeczeństwa i uzasadnianie jej racji bytu. W modelu prakseologicznym Chevallarda, na warstwę dyskursu w praktykach instytucjonalnych zwraca uwagę tzw. „blok teoretyczny” modelu, czyli „technologia” i „teoria”.

Poza wyżej opisaną płaszczyzną jawną czy oficjalną, działanie instytucji regulowane jest także przez niewypowiedziane „normy” i „strategie” zachowania właściwego, o których istnieniu nowy członek instytucji dowiaduje się dopiero wtedy, gdy zdarzy mu się normę przekroczyć i usłyszy, że „tak się u nas normalnie nie robi” (Hardy, 2009: 30; ścisłe definicje przepisów, norm i strategii można znaleźć w Ostrom, 2005: 139-140).

Krótko mówiąc zatem (Fig. 1), instytucja to zorganizowane, powtarzające się i w dużej mierze rutynowe, działanie zespołu ludzi, zwanych uczestnikami członkami lub podmiotami instytucji, na pewnej arenie działania uznawanego społecznie za potrzebne lub celowe. Działanie jest regulowane, w płaszczyźnie oficjalnej, przez podział pracy i hierarchię stanowisk zajmowanych przez uczestników, koordynację działań i przepisy: jest to warstwa zinstytucjonalizowana działań instytucji. Za nieprzestrzeganie przepisów przewidziane są, w sposób formalny, kary. Ponadto, instytucja wytwarza obszerną sferę norm i strategii zachowania „właściwego”, usankcjonowanych tradycją i rytualizacją postępowania bardziej niż przepisami czy prawami ekonomii myślenia lub działania. Sfera ta w dużej mierze decyduje o tym, co nazywa się „kulturą” instytucji (zob. Abravanel, Allaire, Firsirotu & Hobbs, 1988; Ashkanasy, 2000).

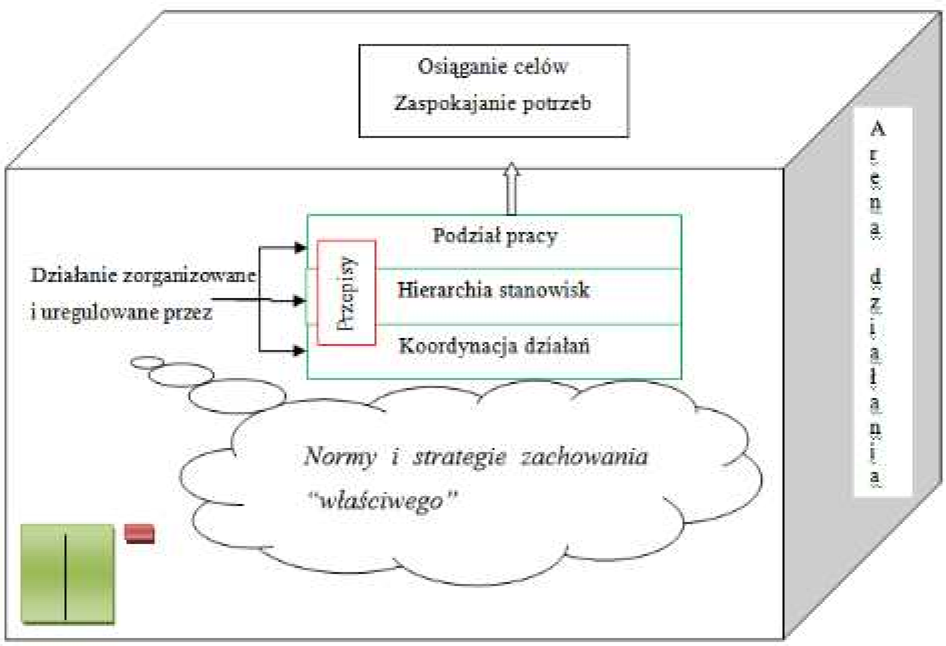

Fig. 1 Model instytucji

Przykład badania praktyki nauczania pojęcia granicy funkcji z perspektywy instytucjonalnej – praca doktorska Nadii Hardy

Przedmiotem badań w pracy Nadii Hardy była instytucja wielosekcyjnych kursów Rachunku Różniczkowego i Całkowego („Calculus I and II") jednej zmiennej w jednym z montrealskich dwuletnich college'ów. Studenci tych college'ów są absolwentami quebeckich szkół średnich, które kończą w wieku 16-17 lat, i po których nie mogą od razu wstąpić na uniwersytet. Niektóre programy college'ów są akademickie i przygotowują na odpowiednie wydziały uniwersyteckie. Dwa trzymiesięczne kursy Calculus są wymagane od studentów, którzy aspirują do dostania się na wydziały nauk ścisłych na uniwersytecie. W college'u badanym w pracy Nadii Hardy, studenci zapisani na pierwszy kurs (Calculus I) w semestrze jesiennym roku 2007 byli podzieleni na 19 równoległych sekcji prowadzonych przez 14 różnych instruktorów, po 25-35 studentów w każdej sekcji. To spośród tych studentów rekrutowało się 28 studentów, których Nadii udało się zwerbować do uczestnictwa w godzinnym wywiadzie opartym na trzech zadaniach dotyczących granicy funkcji. Indywidualni instruktorzy nie mają prawa decydować, co będą robić na kursie. Program kursu (oraz podręcznik) jest ustalany kolektywnie przez Komitet Programowy kursu, złożony ze wszystkich instruktorów w danych roku akademickim. Jest to program bardzo szczegółowy, z rozpisaniem co będzie robione w każdym tygodniu, tak, że można się spodziewać, wizytując sekcje w danym tygodniu, że we wszystkich będzie przerabiany ten sam temat. Instruktorzy indywidualnie układają zadania na egzamin śródsemestralny, ale wspólny egzamin końcowy, najważniejszy, układany jest znowu kolektywnie, przez Komitet Egzaminu Końcowego, którego wszyscy instruktorzy są automatycznie członkami. W „instytucji" tego kursu instruktorzy zajmują więc przynajmniej trzy różne pozycje: członka Komitetu Programowego, nauczyciela w klasie, i członka Komitetu Egzaminu Końcowego. Podręcznik, program kursu, wspólny egzamin końcowy, jego waga w ostatecznej ocenie studenta, istnienie komitetów Programowego i Egzaminu Końcowego są oficjalnymi „przepisami" regulującymi funkcjonowanie instytucji Kursu „Calculus" w college'u. Ale już wybór tematów składających się na kurs, zadań na egzamin końcowy czy rozwiązania „modelowe" zadań egzaminacyjnych z poprzednich lat, które są ogłaszane i dostępne dla studentów, należą do słabo zinstytucjonalizowanej sfery norm i niekwestionowanych tradycji zachowania „właściwego”. Wpływ tych norm i tradycji jest jednak niebagatelny, sądząc po podobieństwie egzaminów końcowych z ostatnich sześciu lat.

Model wiedzy przeznaczonej do nauczania granic funkcji na kursie Calculus I

Analiza wykazała, że w latach 2001-2007, temat granicy funkcji na egzaminach końcowych pojawiał się w postaci jedynie trzech typów zadań T1, T2, T3, opisanych poniżej. Na podstawie analizy tekstów podręczników dotyczących tych typów zadań, notatek do wykładu instruktorów, oraz modelowych rozwiązań zadań z egzaminów końcowych, można było wypracować, dla każdego typu, model praktyki jego nauczania w postaci „prakseologii”, a więc systemu zlożonego z typu zadań, przyjętych technik ich rozwiązywania oraz dwóch poziomów dyskursów uzasadniających, technologii i teorii. Technologia i teoria były dla studentów dostępne w podręcznikach lub notatkach z wykładów, przy czym bardziej formalne ich elementy i dowody znajdowały się jedynie w rozdziałach dodatkowych, ponadobowiązkowych. Instruktorzy mogli, ale nie musieli przeprowadzać dowodów na wykładach. Od studentów, w pracach pisemnych, tych dyskursów nie oczekiwano; zadania nie wymagały teoretycznych uzasadnień, i nie było zadań na dowodzenie.

Oto trzy rozpoznane, dzięki tej analizie, prakseologie (Hardy, 2009: Rozdział 4), opisujące „wiedzę o granicach funkcji przeznaczoną do nauczania” (*knowledge to be taught*). Część tych prakseologii dotycząca jedynie typów zadań i technik ich rozwiązywania jest modelem tego, co instytucja uważa, że studenci powinni koniecznie opanować w związku z granicami funkcji („wymagania minimalne”) (*knowledge to be learned*). Przedstawienie prakseologii w tekście poniżej jest, w dużej mierze, tłumaczeniem z rozdziału czwartego pracy N. Hardy. Dla ułatwienia lektury, pomijam ścisłe stosowanie cudzysłowów i odniesień do stron.

Prakseologia P1

Typ Zadań T1**.** Oblicz granicę: $\lim_{x \to c} \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Opis: c jest stałą; $P(x)$ i $Q(x)$ are wielomianami takimi, że czynnik $x-c$ występuje zarówno w $P(x)$ jak w $Q(x)$; $x-c$ jest stopnia 1 w $Q(x)$.

Technika τ1. Podstaw c za x and rozpoznaj nieokreśloność typu *0/0* [5]. Rozłóż $P(x)$ i $Q(x)$ na czynniki i skreśl czynniki wspólne. Podstaw c za x. Otrzymana wartość jest granicą. (Technika ta nie jest w podręcznikach lub dyskursie instruktorów formułowana w ogólny sposób, z użyciem zmiennych i parametrów; jest „pokazana na przykładach".)

Przykład: Oblicz granicę

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x+5}{x^2-6x+5}.$$

Oczekiwane rozwiązanie:

(Podstawienie 1 za x w wyrażeniu dla sprawdzenia, czy mamy do czynienia z nieokreślonością 0/0 nie jest wymagane w pisemnych rozwiązaniach studentów).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x+5}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-5)}{(x-1)(x-5)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-5}{x-5}=$$

$$=\frac{1^2+1-5}{1-5}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

Technologia θ1. Twierdzenie 1. Jeśli dwie funkcje zgadzają się wszędzie poza jednym punktem c to $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)$. Twierdzenie 2. Jeśli $r(x)$ jest funkcją wymierną i c jest liczbą rzeczywistą taką, że $r(c)$ istnieje, to $\lim_{x\to c} r(x)=r(c)$.

Teoria Θ1. Twierdzenie 1 jest w głównej części podręcznika i w notatkach do wykładów uzasadnione wizualnie, za pomocą wykresu. Tam też znajdujemy sformułowanie algebraicznych własności granic. W rozdziałach dodatkowych podręcznika twierdzenia w θ1 są udowodnione w terminach definicji ε-δ granicy funkcji w punkcie.

[5] Ten pierwszy krok w technice τ1 pojawia się w podręczniku przy ogólnym opisie strategii obliczania granic. Krok ten jest jednak pomijany w przykładach rozwiązań konkretnych zadań i w modelowych rozwiązaniach instruktorów. To samo zachodzi dla techniki τ2.

Prakseologia P2

<u>Typ zadań T2</u>**.** Oblicz granicę: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{\sqrt{P(x)}-Q(x)}{R(x)}$.

Opis: P(x), Q(x) i R(x) są wielomianami takimi, że $\sqrt{P(c)}-Q(c)=0$, *R© = 0, i czynnik* $P(x)-[Q(x)]^2$ *jest stopnia 1 w R(x).*

Technika τ2**.** Podstaw *c* za *x* i rozpoznaj nieokreśloność typu *0/0.* Pomnóż i podziel przez wyrażenie sprzężone do $\sqrt{P(c)}-Q(c)$. W mianowniku wyjmij przed nawias czynnik $P(x)-[Q(x)]^2$. Uprość wyrażenie i podstaw *c* za *x*. Otrzymana wartość jest granicą.

Przykład:

Zadanie. Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$.

Oczekiwane rozwiązanie.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x^2-16)}\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{(4+4)(\sqrt{4}+2)}=\frac{1}{32}$$

<u>Technologia θ2</u>. Twierdzenie 1 jak w Prakseologii P1. Jeśli *n* jest liczbą całkowitą dodatnią, a *c* jest liczbą rzeczywistą, to $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{c}$ dla każdego *c* jeśli *n* jest liczbą nieparzystą, i dla każdego nieujemnego *c* jeśli *n* jest liczbą parzystą.

<u>Teoria Θ2</u>: To samo co w Prakseologii P1.

Prakseologia P3

<u>Typ zadań T3</u>**.** Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Opis: *P(x)* i *Q(x)* są wielomianami takimi, że *m*, stopień *P(x)*, jest niewiększy niż *n*, stopień *Q(x)*.

Z trzecim typem zadań związane są dwie techniki. Technika τ3a pojawia się w podręczniku, i jest tam pokazana nie w terminach ogólnych, lecz na kilku przykładach.

Technika τ3a. Podziel *P(x)* i *Q(x)* przez x^n. Uprość każdy wyraz, a następnie skorzystaj z algebraicznych własności granic oraz z faktu, że granica ilorazu stałej przez potęgę *x* przy *x* dążącym do nieskończoności jest równa 0.

Przykład.

Zadanie. Oblicz granicę: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{6x - 2x^4}$.

Oczekiwane rozwiązanie:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{6x - 2x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^4 - 2x + 1}{x^4}}{\frac{6x - 2x^4}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\frac{6}{x^3} - 2} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 5 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x^3} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{x^3} - \lim\limits_{x\to\infty} 2} = \frac{5 - 0 + 0}{0 - 2} = -\frac{5}{2}$$

Po kilku przykładach tego typu, podręcznik oferuje tekst zatytułowany „Guidelines” (wskazówki) dotyczące obliczania granic funkcji wymiernych w nieskończoności. Mówi się tu mianowicie, że dla znalezienia granicy wystarczy porównać *m* i *n*, stopnie licznika i mianownika. Jeśli *m* = *n*, granica jest równa ilorazowi współczynników wiodących w *P(x)* i *Q(x)*. Jeśli *m* < *n*, granica jest *0*. Wskazówki są uogólnieniem przykładów. Ale uogólnienie nie jest udowodnione; nie sugeruje się nawet, że dowód jest potrzebny. Ponadto, w podręczniku brak przykładu zastosowania tych wskazówek. W ten sposób, przykłady takie, jak przedstawiony wyżej nie stają się ilustracją ogólnego twierdzenia – elementu *technologii*, lecz pozostają formą komunikacji pewnej *techniki*, którą należy stosować przy rozwiązywaniu zadań tego typu. Mamy tu do czynienia z niekonsekwencją matematyczną, działaniem, które jest nieracjonalne z czysto matematycznego punktu widzenia, gdyż po co „stosować” dowód twierdzenia, kiedy można bezpośrednio zastosować samo twierdzenie? Ta niekonsekwencja wskazuje, że Prakseologia P3 nie jest prakseologią matematyczną, lecz dydaktyczną.

W związku z typem zadań T3, Nadia Hardy znalazła w modelowych rozwiązaniach zadań egzaminacyjnych, poza „techniką” przedstawioną powyżej, jeszcze następującą technikę, τ3b:

<u>Technika τ3b.</u> Wyprowadź przed nawias x^m z *P(x)* i x^n z *Q(x)*, i uprość $\frac{x^m}{x^n}$ do $\frac{1}{x^{n-m}}$. Skorzystaj z faktu, że granica ilorazu stałej przez dodatnią potęgę *x* przy *x* dążącym do nieskończoności jest równa *0*.

Przykład:

Zadanie: Oblicz granicę $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-2x+1}{6x-2x^4}$.

Oczekiwane rozwiązanie:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-2x+1}{6x-2x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(5-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(\frac{6}{x^3}-2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(5-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{\left(\frac{6}{x^3}-2\right)}=-\frac{5}{2}$$

Z tego, jakich rozwiązań zadań typu T3 instytucja oczekuje od studentów na egzaminie końcowym jasno wynika, że „wskazówki” w podręczniku nie stanowią części *wiedzy do opanowania przez studentów*. Z drugiej strony, fakt zamieszczenia tych wskazówek na liście tematów, które mają być w którymś tygodniu „przerabiane” ma kursie wskazuje, że należą one do *wiedzy przeznaczonej do nauczania*. Ale tylko nauczyciel, jak się wydaje, ma prawo stosowania tej wiedzy jako techniki, i to nie wtedy, kiedy pokazuje studentom, jak ma wyglądać rozwiązanie pisemne. Wobec tego można założyć, że technologia i teoria odpowiadające praktyce nauczania typu zadań T3 są następujące:

Technologia θ3. Granica ilorazu stałej przez dodatnią potęgę *x* przy *x* dążącym do nieskończoności jest równa *0*. Kilka przykładów rozwiązanych techniką τ3a. (Technikę tę można sformalizować w postaci dowodu matematycznego "wskazówek": Niech $P(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $a_m \neq 0$, będzie licznikiem funkcji wymiernej, $Q(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, $b_n \neq 0$, mianownikiem. Załóżmy, że $m \leq n$. Wtedy

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{n} b_i x^i}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{m}\frac{a_i x^i}{x^n}}{\sum_{i=0}^{n}\frac{b_i x^i}{x^n}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a_m}{x^{n-m}}+\varepsilon}{b_n+\delta}=\begin{cases}0 & gdy\ \ m<n\\ \frac{a_m}{b_n} & gdy\ \ m=n\end{cases}$$

gdzie ε i δ dążą do *0* na mocy faktu, że granica ilorazu stałej przez dodatnią potęgę *x* przy *x* dążącym do nieskończoności jest równa *0*. Ale formalizacji tej praktyka nie przewiduje. Nie przewiduje też stosowania wyników tej formalizacji w rozwiązywaniu zadań.)

Teoria Θ3. Definicja ε-*N* granicy funkcji w nieskończoności; dowód ε-*N* twierdzenia, że granica ilorazu stałej przez dodatnią potęgę *x* przy *x* dążącym do nieskończoności jest równa *0*. Algebraiczne własności granic; dowody tych własności.

Jak wspomniałam wyżej, typy zadań T1, T2 i T3 oraz odpowiadające im techniki określają to, co w praktyce kursu Calculus I stanowi *wiedzę do opanowania* na temat granic funkcji z punktu widzenia instytucji Egzaminu Końcowego. Nauczyciele w swoich klasach i testach śród-semestralnych mogą próbować ustanawiać inne normy. Ale wobec wagi egzaminu końcowego i faktu, że studenci z różnych sekcji komunikują się ze sobą i pilnują instruktora, by nie wymagał wiecej niż inni instruktorzy oraz nie wychodził poza materiał wystarczający do zdania egzaminu końcowego, to, co instruktor robi w swojej sekcji nie ma wielkiego wpływu na to, co studenci uważają za wiedzę do opanowania.

Wywiady ze studentami: Co studenci uważają za wiedzę do opanowania o granicach funkcji.

W celu zbadania tego, co studenci uważają za wiedzę do nauczenia się o granicach funkcji w ramach kursu Calculus I, Nadia Hardy zaprojektowała wywiad oparty na trzech zadaniach i przeprowadziła go indywidualnie z dwudziestoma ośmioma studentami pochodzącymi z sekcji kursu prowadzonych przez trzynastu różnych nauczycieli, przy czym liczba studentów pochodzących od tego samego nauczyciela nie przekraczała czterech.

Wywiad: Zadanie 1

Pierwsze zadanie było klasycznym zadaniem klasyfikacyjnym, stosowanym często przez Vygotskiego dla określenia stopnia rozwoju myślenia pojęciowego. Na stole rozłożono 20 kartoników. Na każdym kartoniku napisane było jedno wyrażenie postaci $\lim_{x\to c} f(x)$ gdzie c było liczbą skończoną (0, 1, 3, 4, 5) lub symbolem ∞, a $f(x)$ - funkcją stałą (w dwóch przypadkach), wielomianem (w jednym przypadku), funkcją wymierną (w dziewięciu przypadkach), sumą wielomianu i pierwiastka z wielomianu (w jedym przypadku), ilorazem takiej funkcji i wielomianu (w czterech przypadkach), lub funkcją zawierającą funkcję sinus (w dwóch przypadkach). (Tabela 2). Studentów proszono, by podzieli te kartoniki na grupy według takich reguł, jakie uznają za stosowne. Nie musieli tych reguł formułować przed dokonaniem klasyfikacji. Dopiero po pogrupowaniu kartoników prowadzący wywiad miał prawo zapytać studenta o ujawnienie reguły. Gdy student podał regułę, prowadzący wywiad zadawał pytania dotyczące przypadków wąptliwych, np. „a dlaczego to wyrażenie należy do klasy (nazwanej tak a tak)?”.

Tabela 2. Wyrażenia do klasyfikacji w pierwszej części wywiadu i ich podobieństwo do typów T1, T2 i T3

	Wyrażenie na kartoniku	Wynik podstawienia	Wartość granicy	Typ granicy	Zadanie typowe, tak czy nie? Typ
1	$\lim\limits_{x\to 5} 3$	3	3	**Granica w punkcie** funkcji określonej i ciągłej w tym punkcie.	Nie
2	$\lim\limits_{x\to 1} 4x^3+7x-9$	2	2	j.w.	Nie
3	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x-4}$	$\frac{0}{-6}$	0	j.w.	Nie
4	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x+4}$	$\frac{0}{8}$	0	j.w.	Nie
5	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-3x-9}{2x^2-4x-6}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{9}{4}$	Granica w punkcie. Nieoznaczoność typu 0/0, granica istnieje i jest skończona	Tak, T1
6	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)(x-3)}$	$\frac{0}{0}$	-1	j.w.	Tak, T1
7	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	j.w.	Tak, T2
8	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$	$\frac{0}{0}$	1	j.w.	Nie
9	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+6x+19}{x^3-3x+2}$	$\frac{26}{0}$	∞	Granica w punkcie. Funkcja nieokreślona w tym punkcie. Asymptota pionowa. Funkcja dąży do nieskończoności.	Nie
10	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+20}-\sqrt{5}}{5-x}$	$\frac{0}{0}$	Nie istnieje	Granica w punkcie. Nieoznaczoność typu 0/0. Asymptota pionowa. Granica nie istnieje.	Nie
11	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x-2}{x-1}$	$\frac{-2}{0}$	Nie istnieje	Granica w punkcie. Funkcja nieokreślona w tym punkcie. Asymptota pionowa. Granica nie istnieje.	Nie
12	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-4}{x^2-25}$	$\frac{21}{0}$	Nie istnieje	Granica w punkcie. Funkcja nieokreślona w tym punkcie. Asymptota pionowa. Granica nie istnieje.	Nie

13	$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$	$\sin\frac{1}{0}$	Nie istnieje	Granica w punkcie. Funkcja nieokreślona w tym punkcie. Oscylacja przy stałej amplitudzie. Granica nie istnieje.	Nie
14	$\lim_{x\to\infty} 7$	7	7	**Granica w nieskończoności** funkcji stałej.	Nie
15	$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^3 - x + 2}{3x^3 + 1}$	$\frac{\infty}{\infty}$	3	Granica w nieskończoności. Nieoznaczoność typu ∞/∞, granica istnieje i jest skończona.	Tak, T3
16	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 25}{x^3 - 1}$	$\frac{\infty}{\infty}$	0	j.w.	Tak, T3
17	$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x - 5}$	$\frac{\infty}{-\infty}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	j.w.	Nie
18	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 7x - 1}$	$\frac{\infty}{\infty}$	∞	Granica w nieskończoności. Nieoznaczoność typu ∞/∞, funkcja dąży do nieskończoności.	Nie
19	$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	$\frac{\infty}{\infty}$	∞	j.w.	Nie
20	$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x$	$\infty - \infty$	0	Granica w nieskończoności. Nieoznaczoność typu $\infty - \infty$, granica istnieje i jest skończona.	Nie

Uzasadnienia klasyfikacji dwudziestu badanych odzwierciedlały myślenie o granicach funkcji nie wychodzące ponad myślenie „kompleksami” (w sensie Wygotskiego, (Vygotsky, 1087). O czterech studentach nic nie można było powiedzieć, ponieważ ich dyskurs nie dotyczył granic. Jeden student wydawał się myśleć na poziomie pseudopojęć i jeden tylko wykazał się myśleniem pojęciowym o granicach.

Wielu (12 spośród 28) studentów kierowało się w swoich klasyfikacjach przede wszystkim techniką algebraiczną obliczania granic. Zwracali uwagę głównie na postać funkcji i to, czy daje się ją rozłożyć na czynniki, uprościć, stosując szkolną algebrę. Student S1 należał do tej sporej grupy (Tabela 3).

Tabela 3. Klasyfikacja studenta S1

Klasa	Elementy klasy	"Reguły" studenta
1	3, 6, 12, 16, 19	Różnica kwadratów
2	1, 14	Stałe
3	8, 13	Z trygonometrią. To mnie myli.
4	4, 7, 10, 17, 20	Z pierwiastkami.
5	2, 5, 9, 11, 15, 18	Wielomiany.

Byli też studenci, którzy brali pod uwagę nie tylko postać algebraiczną funkcji, ale i punkt, w którym granica była liczona. Przykładem takiego zachowania jest student S2 (Tabela 4).

Tabela 4. Klasyfikacja studenta S2

Klasa	Elementy klasy	"Reguły" studenta
1	1, 14	Granica stałej. Można to zrobić od razu.
2	4, 7, 10	Pomnożyć górę i dół przez pierwiastek.
3	3, 5, 6, 9, 11, 12	Ułamki.
4	15, 16, 18, 19	Ułamki do nieskończoności
5	17, 20	Pierwiastki kwadratowe, ale do nieskończoności.
6	2	[brak reguły]
7	8, 13	[brak reguły]

W sumie siedmiu studentów brało pod uwagę wyłącznie informację istotną z punktu widzenia „Calculus": punktu, w którym liczy się granicę, typ nieoznaczoności, wartość granicy. Dwoje studentów kierowało się wyłacznie arytmetyką w zbiorze liczb rzeczywistych rozszerzonym o plus i minus nieskończoność. Dwoje kierowało się mieszaniną kryteriów arytmetycznych i Calculus, a dwoje – algebraicznych i Calculus.

Tylko jeden student stosował konsekwentnie kryteria właściwe Analizie i stosował je w sposób pojęciowo spójny: S28 (Tabela 5).

Tabela 5. Klasyfikacja studenta S28

Klasa	**Elementy**	**"Reguły"**
1	1, 3, 16, 20	Granica jest 0
2	9, 11, 12, 18, 19	Granica jest plus/minus nieskończoność.
3	2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 15, 17	Skończone niezerowe liczby.
4	13	Rozbieżna.

Tylko student S28 widział potrzebę wyjaśnienia „klucza" swojej klasyfikacji, a nie tylko nazwania wspólnym terminem elementów każdej grupy.

Wywiad: Zadanie 2

W drugiej części wywiadu, studenci mieli do obliczenia cztery granice (Tabela 6).

Tabela 6. Zadania w drugiej części wywiadu

2.1 $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+x}$	2.2. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-1)}{x^2-9}$
2.3. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-4}{x^2-25}$	2.4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3+4x^2+9}{x^2+2}$

Z analitycznego punktu widzenia, granice 2.1, 2.2 i 2.4 są jednego typu: są to granice w punkcie funkcji ciągłych w tym punkcie. Granica 2.3 nie istnieje (Jest to wyrażenie numer 12 w Tabeli 2). Ani jedno z tych zadań nie jest zadaniem typowym w sensie T1, T2 lub T3. Jednak studenci uważali masowo, że 2.1, 2.2 i 2.3 są typu T1, ponieważ wielomiany występujące w funkcjach dają się rozłożyć na czynniki (można nimi algebraicznie manipulować). Początkowo nie interesowało ich, czy te manipulacje są potrzebne do obliczenia granicy. Zadanie 2.4 było dla wielu studentów typu T3 i rozwiązywali je stosując techniki związane z T3, zanim spostrzegali się, że granica jest obliczana w 1, a nie w nieskończoności.

W 2.1 i 2.3 większość studentów próbowała rozkładać na czynniki licznik i mianownik, nawet wtedy, gdy przedtem dokonywali podstawienia i otrzymywali skończone liczby. Kiedy nie dawało się znaleźć żadnych wspólnych czynników do skreślenia, niektórzy studenci nie potrafili dać odpowiedzi (2 w 2.1, 10 w 2.3).

Oto przykład głośnego myślenia studenta S1 na temat zadania 2.1:

> S1: Ok. Pierwsza rzecz, którą robię, jak widzę granice, to podstawiam liczbę do której dąży, żeby zobaczyć co to daje. Więc w tym przypadku mam zero przez dwa. […] A następna rzecz, którą robię, to rozkładam na czynniki. Ale teraz nie pamiętam, czy jak wyjmę liczbę ujemną, to czy mogę ją uprościć? [Student S1wyjął przed nawias x w mianowniku i potem nie wiedział co zrobić ponieważ drugi czynnik w mianowniku był $x + 1$ a nie $x – 1$ jak oczekiwał. Myślał, że może wyjęcie przed nawias – 1 coś da.]

Student ten (i wielu innych) traktował technikę τ2 jako ciąg „kroków" (steps) do wykonania.

A oto co mówił student S18:

> S18: Zwykle, jak patrzę na zadanie to pierwsza rzecz jaką widzę, to… zawsze zakładam, że to się da rozłożyć na czynniki, bo nigdy nie dali mi zadania, w którym tego by się nie dało zrobić…. Patrzę, czy to nie jest trójmian albo różnica kwadratów….

Szczególnie interesujące było zachowanie studentów wobec zadania 2.4. Dwóch studentów odczytało zadanie jako obliczanie granicy w nieskończoności. Trzech próbowało podzielić licznik przez mianownik, gdy stwierdzili, że wielomiany nie dają się łatwo rozłożyć na czynniki. Dwudziestu studentów rozwiązało zadanie przez bezpośrednie podstawienie, ale dziwili się, że zadanie jest zbyt łatwe. Ciekawe, że ośmiu spośród tych studentów nie liczyło granicy w zadaniu 2.2 przez podstawienie, lecz najpierw rozkładali mianownik na czynniki. Prawdopodobnie myśleli, że zadanie 2.2 jest typu T1, natomiast od razu wiedzieli, że zadanie 2.4 nie jest typu T1, bo wielomiany nie dają się łatwo rozłożyć na czynniki. Studenci, którym wydawało się, że w zadaniu 2.4 chodzi o granicę w nieskończoności, kierowali się prawdopodobnie tym właśnie kryterium, zaliczając 2.4 do typu T3. Na egzaminach końcowych analizowanych przez N. Hardy, ani razu w ciągu sześciu lat nie pojawiło się zadanie na obliczenie granicy w nieskończoności funkcji wymiernej (T3), w którym wielomiany w liczniku i mianowniki byłyby „łatwo" rozkładalne na czynniki. Trzej studenci, którzy próbowali technik algebraicznych by uprościć wyrażenie w zadaniu 2.4 prawdopodobnie zwracali uwagę na fakt, że granica jest liczona w jedynce i zaliczali to zadanie do typu T1. Studenci najwyraźniej skupiali uwagę na algebraicznym kształcie funkcji, a nie na całości wyrażenia podanego w zadaniu (granicy funkcji).

Oto rozmowa w wywiadzie ze studentką S12, na temat zadania 2.4. Była ona jedną ze studentów, którym wydawało się, że chodzi o granicę w nieskończonosci.

> I: Dlaczego myślałaś, że to granica w nieskończoności?
> S12: Bo tego nie można rozłożyć na czynniki, nie? Nie, chyba nie można. No więc dlatego, że tego nie można rozłożyć na czynniki. Więc jedyna rzecz, której mogli chcieć od nas, to podzielić przez x.

N. Hardy w następujący sposób opisała swój model wyobrażeń studentów o wiedzy do opanowania na temat granic funkcji. Studenci wyróżniali dwa typy granic:

Typ 1. Gdy x dąży do liczby skończonej, to wyrażenie funkcji jest zwykle nieoznaczonością typu 0/0, i składa się z dwumianów lub trójmianów. Wielomiany w tych wyrażeniach dają się łatwo rozłożyć na czynniki przy użyciu standardowych technik algebry szkolnej. Granica wyrażenia zawierającego wielomiany dające się rozłożyć na czynniki nie może być obliczona bezpośrednio przez podstawienie; potrzebne są dodatkowe operacje.

Typ 2. Jeśli funkcja wymierna zawiera wielomiany, które nie są rozpoznawalne jako dwumiany lub trójmiany dające się łatwo rozłożyć na czynniki za pomocą algebry szkolnej, to albo granica jest liczona w nieskończoności, albo do obliczenia granicy wystarczy podstawić stałą pod x.

To wyobrażenie studentów nie daje się opisać w terminach prakseologii czysto matematycznych. Można w nim wyróżnić typy zadań i techniki rozwiązywania, ale zamiast matematycznych „technologii" i „teorii", mamy tu do czynienia z uzasadnieniami opartymi na normach zachowania właściwego, „normalnego" w danej sytuacji społecznej. Można tu mówić o normach socjomatematycznych w sensie Voigta (Voigt, 1995), gdyż chodzi o coś w rodzaju „umowy społecznej" dotyczącej zakresu i rodzaju przedmiotów matematycznych dawanych studentom w zadaniach.

Studenci klasyfikują granice funkcji wymiernych według algebraicznych cech i wyrażenia, nie według kryteriów specyficznych dla Rachunku Różniczkowego i Całkowego takich jak typ nieoznaczoności lub zbieżność czy rozbieżność. Studenci dobierają technikę obliczania granicy do algebraicznego „wyglądu" funkcji.

Nie będąc w posiadaniu matematycznej „technologii" i „teorii" praktyki związanej z zadaniami typów T1-T3, dla wielu studentów technika stała się ciągiem niepowiązanych ze sobą czynności do wykonania: czynności, które zwykle, rutynowo, *normalnie* robi się w takiej sytuacji. Studenci nie zachowywali się racjonalnie z punktu widzenia praktyki matematycznej; ale zachowywali się na pewno „właściwie”, z punktu widzenia instytucji, której byli uczestnikami.

Wywiad: Zadanie 3

Zadania w części trzeciej wywiadu nie tylko nie były typowe, ale, przeciwnie do zadań w części drugiej, nie były nawet podobne do zadań typowych (Tabela 7).

Tabela 7. Zadania w trzeciej części wywiadu

3.1 Find $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x}\cos(x)$	3.2 Find $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x}\cos(x)$
3.3. Find $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$	

Celem tej części wywiadu było sprawdzenie pewnej hipotezy. W trakcie kursu, studenci spotykają się z różnymi nieformalnymi sposobami odgadywania granic (obliczenia numeryczne, studiowanie wykresów). Jednak te sposoby nie są zinstytucjonalizowane jako „właściwe” środki przedstawiania pisemnych rozwiązań zadań na egzaminach. Można oczekiwać więc, że studenci będą początkowo zupełnie bezradni wobec zadań; „wierni” swojej instytucji, będą próbowali zachowywać sie poprawnie, czyli podstawiać, następnie szukać możliwości rozłożenia na czynniki, itd. Tego rodzaju zachowanie było, dla N. Hardy, dowodem, że „instytucjonalny nacisk na techniki algebraiczne zaciemnił w pamięci studentów wszelkie inne poznane na kursie metody”. Ale, jednocześnie okazało się, że wystarczyła najmniejsza zachęta za strony prowadzącego wywiad, aby pomyśleć inaczej niż według utartego schematu (np. „a może chcesz użyć kalkulatora?”, „a jak myślisz, że zachowuje się cosinus w nieskończoności?”), aby studenci zaczęli rozumować matematycznie, a nie „normalnie”, czy „właściwie”.

Oto przykład, w kontekście zadania 3.2:

> S14: Wiem, że kalkulator czasami kłamie (śmieje się), ale wydaje mi się, że to stale dąży do zera.
> I: Jak to możesz wyjaśnić?

S14: Wiem że e do x gdy x dąży do minus nieskończoności jest zero, a cosinus stale idzie, więc nie ma granicy, i wydaje mi się, że jak się je pomnoży… Nie mogę sobie tego wykresu wyobrazić, mogę sobie je wyobrazić oddzielnie, ale nie mogę połączyć. Ale myślę, że nie jednak nie istnieje. Przez pomnożenie zmienia amplitudę, więc nie powinna istnieć, bo to tak czy siak idzie i idzie.
I: Ale fakt, że to dąży do zera, zmienia amplitudę
S14: O, ale to się robi coraz mniejsze, więc to będzie zero. Tak.
I: Zmieniasz amplitudę, ale za każdym razem przez mniejszy czynnik.
S14: Tak, więc granica jest zero. To pokazuje, że granica może być pomiędzy [ta ostatnia uwaga odnosi się do poprzednio mającej miejsce dyskusji na temat możliwości funkcji przecinania swojej asymptoty]

Okazało się zatem, że studenci nie są w większości na tak niskim poziomie myślenia pojęciowego, jak by na to wskazywały ich reakcje na zadania w pierwszej i drugiej części wywiadu. To kontekst instytucjonalny, poczucie obowiązku zachowania się „właściwie" wobec instytucji, krępowały ich do tego stopnia, że przestawali myśleć matematycznie.

Jednocześnie fakt, że studenci dysponowali pewnymi strategiami myślenia o granicach opartymi na obliczeniach numerycznych lub wykresach wskazuje na to, że istnieje rozdział (*decoupling*) między praktyką matematyczną w klasie, a sztywno zinstytucjonalizowaną formą oceny studentów w postaci egzaminu końcowego. Pragmatycznie nastawieni studenci wydają się filtrować bogate praktyki matematyczne stosowane w klasie przez pryzmat modelu „wiedzy do opanowania" opartego na egzaminach końcowych i wszystko co zbędne dla osiągnięcia tego wyłącznie celu jest usuwane z bezpośrednio dostępnej pamięci operacyjnej do zakurzonego archiwum myśli nieobowiązkowych.

ZAKOŃCZENIE

Dla poprawy kultury nauczania matematyki nie wystarczą autorskie innowacje w jednej lub kilku klasach. Na konferencjach słyszy się opowiadania o eksperymentach w klasie i o tym, jak wiele studenci nauczyli się w nowych warunkach. Ale kiedy zapytamy autora, czy nauczyła się czegoś również instytucja (Argyris & Schon, 1996), to odpowiedź jest często wymijająca lub negatywna: koledzy nie mają ochoty poświęcać tyle czasu co autor na innowacje. Po co się wysilać, jeśli instytucja zmian nie wymaga? Celem naszego praktycznego działania powinno być nauczenie czegoś całej instytucji szkolnej, a nie tylko pojedyńczych nauczycieli czy uczniów. Ale zmiany, do których możemy dążyć muszą być realistyczne, to znaczy opierać się na wiedzy o funkcjonowaniu instytucji edukacyjnych, ich kulturze i ekonomii działania. Do poszukiwania i zdobywania tej wiedzy chciałam Państwa w tym wykładzie namówić.

BIBLIOGRAFIA

Abravanel, H., Allaire, Y., Firsirotu, M. E. and Hobbs, B. (1988). *La Culture Organisationnelle : aspects théoriques, pratiques et méthodologiques*. Montréal : Gaëtan Morin éditeur.

Argyris, C. & Schon, D. (1996). *Organizational learning II: Theory, method and practice*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Artigue, M., Batanero, C. and Kent, Ph. (2007). Mathematics teaching and learning at post-secondary level. In F.K. Lester, jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1011-1050). Reston, VA: NCTM.

Ashkanasy, N.M. (2000). *Handbook of organizational culture and climate*. Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. and Gascón, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher's practice: the case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 235-268.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 11, 23-41.

Bergé, A. (2007). The completeness property of the set of real numbers in the transition from Calculus to Analysis. *Educational Studies in Mathematics* 67: 217-235.

Bernstein, B. (1970). Social class differences in communication and control. In W. Brandis & D. Henderson (Eds.), *Social class, language and communication*. Routledge: London.

Bernstein, B. (1971). On the classification and framing of educational knowledge. *The Human Context* 3, 339-386.

Bernstein, B. (1977). *Class, codes and control*. Routledge & Kegan Paul.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19*(*1), 77-123.

Bourdieu, P. & Passeron, J.-C. (1964). *Les héritiers, les étudiants et la culture*. Paris : Les Editions de Minuit.

Bourdieu, P. (1994). *Raisons pratiques. Sur la théorie de l'action*. Paris : Editions du Seuil.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., Nichols, D. (1992). Development of process conception of function. *Educational Studies in Mathematics* 23(3), 247-285.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactic situations in mathematics*. Dortrecht: Kluwer.

Bruner, J.S. (1985). The role of interaction formats in language acquisition. In J.P. Forgas (Ed.), *Language and social situations*. New York: Springer-Verlag.

Bruner, J.S. (1996). *The culture of education*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Castela, C. (2004). Institutions influencing mathematics students' private work: A factor of academic achievement. A comparative study of two French higher education institutions. *Educational Studies in Mathematics* 49: 283-312.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble: La Pensée Sauvage editions.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics. Perspectives provided by an anthropological approach. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in didactique of*

mathematics, Selected papers, special issue of Recherches en Didactique des Mathématiques (pp. 131-167). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221–266.
Cobb, P. & Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning. Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ.: Erlbaum.
Cox, R.D. (2005). Online education as institutional myth: Rituals and realities at Community Colleges. *Teachers College Record*. (Online journal).
Crozier, M. & Friedberg, E. (1980). *Actors and systems: the politics of collective action*. Chicago: University of Chicago Press.
Douglas, M. (1986). *How institutions think*. Syracuse, NY: Syracuse University Press.
Dubinsky, E., McDonald, M.A. (2001). 'APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research'. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 275-282). Dortrecht: Kluwer.
Edwards, D. & Mercer, N. (1987). *Common knowledge*. *The development of understanding in the classroom*. London: Routledge.
Goffman, E. (1967). *Interaction ritual : essays in face-t-face behavior*. Chicago : Aldine Pub. Co.
Hall, E.T. (1981). *The silent language*. New York: The Anchor Press, Doubleday. (first edition: 1956).
Hardy, N. (2009). *Students' models of the knowledge to be learned about limits in college level Calculus courses. The influence of routine tasks and the role played by institutional norms*. Concordia University, Montreal, Québec, Canada. PhD Thesis. Available on the internet at http://www.nadiahardy.com
Lakoff, G. & Núñez, R.E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 46*(1-3): 87-113.
Maturana, H.R. & Varela, F.J. (1987). *The tree of knowledge. The biological roots of human understanding*. Boston & London: New Science Library.
Meyer, J.W. & Rowan, B. (1977). 'Institutionalized organizations: Formal structure as myth and ceremony'. *American Journal of Sociology 83*.2, 340-363.
Meyer, J.W. (1977). The effects of education as an institution. *American Journal of Sociology* 83(1), 55-77.
Meyer, J.W., Scott, W.R. & Deal, T.E. (1983). Institutional and technical sources of organizational structure. In J.W. Meyer & W.R. Scott (EDs.), *Organizational environments. Ritual and rationality* (pp. 45-70). Beverly Hills: Sage Publications.
Ostrom, E. 2005. *Understanding Institutional Diversity*. Princeton: Princeton University Press.
Peters, B.G. (1999). *Institutional theory in political science. The 'New Institutionalism'*. London, New York: Continuum.
Powell, W.W. & DiMaggio, P.J. (1991). *The New Institutionalism in organizational theory*. Chicago and London: The University of Chicago Press.
Przeniosło, M. (2002). *Obraz granicy funkcji ukształtowany w czasie studiów matematycznych*. Kielce: Wydawnictwo Akademii Swiętokrzyskiej.
Sadovnik, A.R. (1991). Basil Bernstein's theory of pedagogic practice: A structuralist approach. *Sociology of Education* 64.2 (Special Issue on the Sociology of the Curriculum), 48-63.
Sadovnik, A.R. (1995). *Knowledge and Pedagogy: the Sociology of Basil Bernstein*. Norwood, NJ: Ablex Publishing.
Schlöglmann, W. *Warum sind Unterrichtsformen so stabil? – Zur individuellen wie sozialen Funktion von Routine*. Unpublished Manuscript.

Seeger, F. Voigt, J. & Waschescio, U. (1998). *The Culture of the Mathematics Classroom.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Selden, J., Mason, A. & Selden, A. 1989. 'Can average Calculus student solve non-routine problems?' *Journal of Mathematical Behavior 8* (2), 45-50.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

Sierpinska, A. (1990): Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics 10* (3), 24-36.

Sierpinska, A. (1994). *Understading in mathematics*. London: Falmer.

Sierpinska, A. (1996). The diachronic dimension in research on understanding in mathematics - usefulness and limitations of the concept of epistemological obstacle. In H.N. Jahnke, N. Knoche, M. Otte (Eds), *History of Mathematics and Education:Ideas and Experiences* (pp. 289-318). Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht.

Sierpińska, A. (2002). 'Dokąd zmierza dydaktyka matematyki?' *Studia Matematyczne Akademii Swiętokrzyskiej 9*, 9-36. (A revised and extended Polish version of my plenary talk at ICME 1996 in Sevilla, Spain).

Sierpinska, A., Bobos, G. & Knipping, Ch. (2008). 'Sources of students' frustration in pre-university level, prerequisite mathematics courses'. *Instructional Science* 36, 289-320.

Sierpinska, A., Bobos, G., Knipping, Ch. (2007), 'A study of university students' frustration in pre-university level, prerequisite mathematics courses: emotions, positions and perception of achievement", *Didactica Mathematicae (Dydaktyka Matematyki)* 30, 47-76.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction*. Mathematics Education Library. New York: Springer.

Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12(2), 151-169.

Varela, F.J., Thompson, E. & Rosch, E. (1993). *The embodied mind: Cognitive Science and human experience*. Cambridge, MA: MIT Press.

Verret, M. (1975). *Le temps des études*. Paris: Librairie Honoré Champion.

Vygotsky, L.S. (1987). Thinking and speech. In R.W. Rieber & A.S. Carton (Eds.), *The Collected Works of L.S. Vygotsky. Volume 1. Problems of General Psychology*. New York & London: Plenum Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Young, M.F.D. (1971). *Knowledge and control: new directions for the sociology of education*. London: Collier-Macmillan.

Zucker, L.G. 1987. '*Institutional theories of organization.*' Ann. Rev. Sociol. 12: 443-64.