Colloque GDM
A Montréal, le 3 & 4 mai 2005

ANNA SIERPINSKA

« PAPA VEUT QUE JE RAISONNE… »[1]

QUELQUES REFLEXIONS SUR LA VALEUR DU RAISONNEMENT MATHEMATIQUE DANS LA FORMATION DE FUTURS CITOYENS ET PROFESSIONNELS

1.— INTRODUCTION

Le thème de ce colloque, « Raisonnement mathématique et formation citoyenne » et les questions soulevées dans le document de discussion suffiraient à remplir un congrès de neuf jours pour quatre mille participants. J'avais donc beaucoup de misère à choisir un point particulier pour ma conférence. Finalement, j'ai décidé de partager avec vous, un peu en vrac, quelques idées qui me sont venues en lisant le document de discussion.

Un point qui a surtout attiré mon attention dans le document de discussion était le suivant :

> Les concepteurs des programmes du *Ministère de l'Éducation du Québec* considèrent pour leur part que l'enseignement de la géométrie constitue un lieu privilégié où initier l'élève aux « … exigences de rigueur, d'exactitude, de justification et de preuve » (MEQ, Math 436, p. 3). Ces exigences ne pourront aller qu'en augmentant, quand on sait que le *nouveau programme* du secondaire fera de la compétence « Déployer un raisonnement en mathématiques » l'une des trois compétences fondamentales. Dans le nouveau programme du primaire déjà en place, la compétence « Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques » joue également un rôle central. (GDM-2005, Exposition du thème du colloque)

Je me suis demandé que pourrait devenir, dans la pratique de l'enseignement et de l'évaluation, l'initiation aux « exigences de rigueur, d'exactitude, de justification et de preuve » et l'exigence de « raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ». Mon expérience et ma mémoire de l'enseignement des mathématiques dans la deuxième moitié du XX^e^ siècle ne me remplissent pas d'optimisme.

Faire des preuves – c'est difficile. Évaluer les preuves des étudiants – n'est pas facile non plus. Et ce n'est pas très agréable pour l'enseignant. Alors pour éviter un taux de retardement

---

[1] Cette citation vient de la chanson enfantine: « Ah, vous dirai-je maman/ ce qui cause mon tourment/ Papa veut que je raisonne/ comme une grande personne/ Moi je dis que les bonbons / valent mieux que la raison »

scolaire excessif, on va construire tout un échafaudage didactique qui va réduire l'activité de preuve à des récitations, à la production de textes formatés d'avance, dont le contenu aura très peu à voir avec les raisonnements réellement faits par les élèves. On va faire la preuve pendant une ou deux semaines et puis on va passer à autre chose. La preuve va perdre son rôle d'explication, de moyen de comprendre, de contrôle de la validité des résultats d'un travail de recherche mathématique. Les didacticiens feront un grand travail conceptuel et ils seront très créatifs, mais les élèves auront une preuve irréfutable que les mathématiques à l'école, ce n'est pas logique, c'est de la mémorisation, c'est des questions qui n'ont pas de sens, c'est le domaine ou la vérité est déterminée par seule l'autorité de l'enseignant, et si les étudiants ne savent pas ce que l'enseignant veut qu'ils fassent, aucun raisonnement ne va les aider à trouver la bonne réponse.

Je ne suis pas contre l'enseignement qui valorise des raisonnements en mathématiques. Je suis seulement contre des programmes où les élèves ont à produire des preuves dans un langage et une forme déterminée a priori parce qu'on le leur demande, c'est-à-dire, où la preuve est un produit du contrat didactique et non un outil de contrôle de la validité, un moyen de s'expliquer et de comprendre une théorie.

2.— QUELLES POURRAIENT ETRE LES CONSEQUENCES DU FAIT DE PRENDRE LE RAISONNEMENT MATHEMATIQUE COMME OBJET EXPLICITE D'ENSEIGNEMENT ?

Je vais expliquer mes craintes à ce sujet sur un exemple.

Les candidats pour les études commerciales dans notre université doivent prendre des cours d'algèbre et de calcul différentiel et intégral. Pour l'intérêt de cette clientèle, on invente des problèmes comme le suivant :

> *Dans le problème suivant, vous devez montrer algébriquement comment vous êtes arrivé à votre réponse. Il ne suffit pas de donner seulement la réponse.*
> Une somme de $10,000 est investie dans deux plans différents, un donnant un intérêt simple de 10% et l'autre de 7.5%. (Le risque est plus grand dans le fond à 10%). Quelle est la plus petite somme qui doit être investie à 10% pour que l'intérêt annuel soit de $850?[2]

[2] Examen final, décembre 2004, MATH 200 *Fundamental Concepts of Algebra*, Concordia University

Supposons qu'un étudiant arrive à la réponse en faisant des calculs systématiques, commençant par un investissement de $ 1,000, l'augmentant de 1,000 et calculant à chaque fois l'intérêt total (Table 1). Il finit par obtenir l'intérêt total de $ 850, lorsque la répartition des fonds est 4,000 + 6,000. Le seul problème est de vérifier si cette somme pourrait être obtenue avec un investissement plus petit que $ 4,000 dans le premier fond.

Table 1. Solution par exploration systématique

Plan 1	Plan 2	Intérêt 1 = .1*Plan1	Intérêt 2 = .075*Plan2	Intérêt total
1000	9000	100	675	775
2000	8000	200	600	800
3000	7000	300	525	825
4000	6000	400	450	850

En observant la dernière colonne, il voit que les nombres croissent toujours par 25. Comme la dernière colonne est obtenue par multiplication par des constantes et l'addition, on ne peut pas avoir des surprises entre les valeurs obtenues et il n'y a certainement pas de possibilité d'obtenir 850 dans la dernière colonne avant d'avoir 4,000 dans la première.

Mais ce raisonnement ne se qualifie pas comme algébrique, donc il ne compte pas dans l'évaluation. Alors l'étudiant décide de rédiger une solution algébrique. Il pose:

$$\begin{cases} x + y = 10,000 \\ 0.1x + 0.075y = 850 \end{cases}$$

Il résout ce système d'équations par des manipulations algébriques et obtient x = 4,000. Sa solution ne contient aucune explication verbale; il s'en abstient car la solution doit être "algébrique". Par ailleurs, cette suite d'équations ne correspond pas à son raisonnement, donc il ne saurait même pas quoi écrire.

Quand les corrections arrivent, l'étudiant est surpris de n'avoir pas reçu 100% de points. La réponse est bonne, mais le raisonnement ne l'est pas – explique l'enseignant. Il fallait écrire:

> Soit x la somme investie à 10% et soit y l'intérêt total.
>
> Par les données du problème,
>
> y = 0.1x + 0.075(10000 – x)
>
> soit
>
> y = 0.025x + 750
>
> ou

$x = (y – 750)/0.025$

Donc, si y est égal à 850, x = 4,000.

Comme y est une fonction croissante, pour x > 4,000, y > 850.

Donc l'investissement de 4,000 à 10% est le moindre qu'on doive faire pour obtenir l'intérêt total de 850.

L'étudiant essaye de convaincre l'enseignant que c'est, en fait, comme cela qu'il a raisonné, mais il ne l'a pas écrit, parce qu'il ne savait pas comment le mettre par écrit avec des x et des y. L'enseignant ne se laisse pas convaincre, parce qu'il doit mettre des notes à base de ce qu'il voit dans la copie et non de ce que l'étudiant lui dit qu'il a pensé, après avoir reçu la note.

3.— LES RAISONNEMENTS MATHEMATIQUES SONT-ILS UTILES POUR LES ETUDIANTS QUI SE DIRIGENT VERS D'AUTRES PROFESSIONS QUE LA RECHERCHE EN MATHEMATIQUES ?

Prenons un autre exemple.

Exemple : Algèbre pour les candidats aux études en psychologie ou éducation

Dans notre université, une des conditions à l'admission aux études en psychologie est la réussite dans un cours d'algèbre de niveau secondaire. Ceux qui ne l'ont pas pris quand ils étaient encore à l'école ou ceux qui l'ont pris il y a un certain temps prennent un cours de rattrapage offert par notre université (MATH 200 *Fundamental concepts of algebra*). Pour réussir ce cours il faut, entre autres, résoudre des problèmes comme le suivant :

Factoriser complètement

$6a^2 x^3 y + 10 a^3 x^4 y^4 + 14 a x^3 y^5$

Les étudiants n'ont pas de moyens théoriques pour valider leur résultat. Le cours ne développe pas la théorie de polynômes au point de pouvoir décider si un polynôme est ou non irréductible. Donc, l'étudiant ne peut pas décider s'il a, oui ou non, factorisé le polynôme "complètement". Autrement dit, la validité de sa réponse n'est pas sous le contrôle de son propre raisonnement, mais dépend de l'autorité de l'enseignant.

À quoi des exercices comme celui-ci peuvent-ils servir dans la formation citoyenne ? Apprendre les mathématiques sans pouvoir discuter de la validité d'un résultat en termes mathématiques avec son enseignant - cela peut produire des citoyens dociles devant l'autorité des savants mathématiciens, mais peut être pas des citoyens critiques vis-à-vis des discours politiques utilisant des arguments quantitatifs ou soi-disant scientifiques.

Donc peut-être ces exercices sont-ils utiles dans les études en psychologie et c'est pour cela qu'on les fait faire aux étudiants ?

Les étudiants en psychologie rencontrent les mathématiques surtout dans les cours de statistiques. À quoi pourrait leur servir une compétence en manipulations algébriques qui est exigée pour leur admission à ces programmes? Les cours de statistiques pour les étudiants en psychologie ou sciences de l'éducation semblent ne pas capitaliser sur cette compétence. Prenons l'exemple du manuel d'Aron & Aron (2002).

Ce manuel introduit la formule pour la variance par rapport à la moyenne d'une population[3] comme une sorte de représentation graphique — plutôt qu'algébrique — de la procédure du calcul de cet indice statistique.

> We have seen that the variance is the average squared deviation from the mean. In symbols, this is how it looks:
>
> $$SD^2 = \frac{\sum (X - M)^2}{N}$$
>
> SD^2 is the symbol for the variance.(…) The symbol emphasizes that the variance is standard deviation squared. The top part of the formula is the sum of squared deviations. X is for each score and M is the mean. Thus, X - M is the score minus the mean, the deviation score. The exponent, 2, tells you to square each deviation score. Finally, the sum sign (Σ) tells you to add together all these squared deviation scores. The bottom part of the formula tells you to divide the sum of the squared deviation scores by N, the number of scores. (Aron & Aron, 2002 : 30)

Le statut opératoire de la représentation symbolique — le fait qu'elle appartient à un *registre sémiotique permettant un traitement* (Duval, 1995) — n'est ni souligné, ni utilisé dans le manuel, même quand une occasion se présente.

Une telle occasion apparaît lorsque le manuel introduit une « formule de calcul » pour la même variance. L'équivalence algébrique des deux formules n'est pas démontrée (et le lecteur n'est pas encouragé à le faire), et elle n'est même pas discutée. On explique seulement le contexte historique de l'existence des formules de calcul à côté des formules de définition. Le lecteur pourrait être conduit à penser que les deux formules sont équivalentes pour des valeurs de N suffisamment grandes, puisqu'on souligne le fait que la formule de calcul est utilisée lorsque le nombre des données est grand.

---

[3] C'est une formule pour la population entière et pas pour un échantillon – cela explique le *N* au dénominateur.

In actual research situations, social and behavioral scientists must often figure the variance and the standard deviation for distributions with a great many scores, often involving decimals or large numbers. This can make the whole process quite time-consuming, even with a calculator. To deal with this problem, over the years researchers developed a number of shortcut formulas to simplify the figuring. A shortcut formula of this type is called *a computational formula*. The computational formula for the variance is

$$SD^2 = \frac{\sum X^2 - (\sum X)^2 \ / \ N}{N}$$

Note that ΣX^2 means that you square each score and then take the sum of these scores. However, $(\Sigma X)^2$ means that you first add up all the scores and then take the square of this sum.

This formula is easier to use if you are computing the variance for a lot of numbers by hand because you do not have to first find the deviation score for each raw score.

However, these days computational formulas are mainly of historical interest. They are used by researchers only when computers are not readily available to do the figuring. In fact, even many hand calculators are set up so that you need only enter the scores and press a button or two to get the variance and the standard deviation. (Aron & Aron, 2002: 31-32)

Regardons les deux formules.

$$SD^2 = \frac{\sum (X - M)^2}{N} \qquad SD^2 = \frac{\sum X^2 - (\sum X)^2 \ / \ N}{N}$$

Pour démontrer qu'elles sont équivalentes, donc qu'elles produisent un même nombre pour une même liste de données X, il faudrait les voir comme représentant des nombres et non des procédures. Ceci est le premier obstacle conceptuel à franchir et nous savons qu'il est de taille; il est aussi très commun parmi les étudiants. Une autre difficulté pour les étudiants qui ont appris l'algèbre dans des cours donnés par des mathématiciens (et non par des statisticiens ou psychologues) est que la notation utilisée dans ces formules est différente de celle qu'ils connaissent. Ces formules ne peuvent pas être prises "à la lettre", pour ainsi dire; elles comprennent des "figures de style mathématique": des métonymies *pars pro toto*, en l'occurrence. Dans les classes d'algèbre, on écrirait plutôt,

$$SD^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - M)^2}{N} \quad \text{et} \quad SD^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{N} X_i)^2 \ / N}{N}$$

Les formules du manuel Aron & Aron sont comme une partie (*pars*) seulement d'un « tout » (*toto*) que constituent les formules ci-dessus.

Dans les cours de statistiques enseignés par des mathématiciens, les formules n'apparaîtraient pas comme des procédures de calcul mais comme des définitions, avec des hypothèses détaillées à propos des variables en jeu. Il est probable que ces formules ne seraient données que comme une sorte d'annexe à une théorie plus générale de l'étude de la distribution des variables aléatoires (e.g. Hogg & Tanis, 2001 : 13). Un étudiant en psychologie ayant appris les statistiques chez des mathématiciens aurait du mal à s'habituer à ce nouveau discours, qu'il verrait comme peu soigné. Pourtant, dans un contexte où tout le monde sait de quoi on parle, on peut faire l'algèbre avec la notation comme celle du manuel d'Aron & Aron, sans traîner les limites des sommes, qui, c'est entendu, sont toujours les mêmes dans le cadre d'un même calcul. « C'est entendu » — donc, on ne se pose plus de questions. On ne questionne pas le contexte, on ne cherche pas à savoir qu'est ce qui se passerait dans un autre contexte, comme en mathématiques. Alors on peut calculer tranquillement, sans se soucier de mettre les indices et les limites des sommes, à condition de se rappeler que X représente une variable qui dépend de l'indice, alors que M est une constante. Ainsi, M est un facteur commun dans la somme ΣXM:

$$\Sigma(X - M)^2 /N = \Sigma(X^2 - 2XM + M^2)/N = \Sigma X^2 /N - 2M (\Sigma X)/N + N M^2/N =$$
$$= \Sigma X^2 /N - 2M^2 + M^2 = \Sigma X^2 /N - M^2 = (\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2 /N)/N.$$

Questionnement de la pertinence des raisonnements mathématiques pour des professions diverses

Les recherches sur les raisonnements effectués par des praticiens des professions diverses (employés des banques, des hôpitaux) mettent en doute l'intérêt de forcer des formes précises de raisonnement sur les étudiants qui se dirigent vers des professions différentes de celles d'un chercheur en mathématiques.

> For the past 15 years, studies of adults' behaviour in the workplace have had an important impact on the way we think about mathematical reasoning. [These research works] have all pointed towards a similar conclusion: that most adults use mathematics to make sense of situations in ways which differ quite radically from those of mathematicians.… Rather than striving towards consistency and generality, problem solving at work is characterised by a pragmatic agenda and geared to solving particular problems. Occupational or professional concerns take precedence over those that are mathematical. » (Noss, Hoyles & Pozzi, 2000: 17)

> From a mathematical point of view, efficiency is usually associated with a general method than can then be flexibly applied to a wide variety of problems. This is clearly not the case in the workplace. Even if a number of tasks could potentially be solved with a similar approach, practitioners prefer to use different approaches for each task, partly based on the resources at hand. The crucial point is that orientations such as generalisability and abstraction away from the workplace are not part of the mathematics with which practitioners work. Thus mathematical routines are rarely, if ever, interpreted as exemplars of completely general mathematical concepts or relationships, nor are they manipulated or transformed to solve different types of problems. (…) [In some cases] we could discern some kind of mathematical model underpinning practice, but one with distinctive workplace features. The model comprises an abstraction from the immediacy of the situation, but because of these workplace features it retains elements of the setting – hence we have called practitioner's conceptions of the mathematics they use at work, situated abstractions. (Ibid: 32)

Tout cela remet en question l'utilité de l'apprentissage de la preuve en mathématiques par tous les étudiants du secondaire, et plus généralement la possibilité du « transfert » des compétences mathématiques à d'autres domaines. Dans sa revue des recherches sur le « transfert », Evans écrivait :

> … Noss & Hoyles recognised a number of ways in which work practices and academic mathematics discourses are distinct ; for example, familiar representations, such as graphs, are 'read' differently : in [banking mathematics], graphs tend to be considered as displays of data – whereas, in [academic mathematics] they are read as a 'medium for expressing relationships' (1996 : 13-15). They were able to locate fruitful points of inter-relation in the learner's everyday practices, and also potential misleading links. One example is the care that is required in discussing interest calculations (using percentages) where the conceptual priority (in [academic mathematics] terms) of simple interest (prior to compound interest) conflicts with its relative rarity in [banking mathematics] practice. But a key point was found where work practices usefully overlap with academic mathematics : the idea of a function was used as a 'bridging concept' between [banking mathematics] and [academic mathematics]. And programming was used as a way of building models…. (Evans, 2000 : 297-8)

Un fait à retenir de cette citation est que les hiérarchies conceptuelles établies en mathématiques sont soumises à d'autres règles que dans d'autres domaines d'activité humaine. On regarde autre chose, on se préoccupe d'autres questions que de l'organisation logique d'une théorie et de la validité et généralité des énoncés. Décontextualisation, qui est le fondement de la généralité en mathématiques, n'est pas la priorité dans les raisonnements dans un milieu de travail.

Evans en arrive à la conclusion qu'un enseignement visant le transfert des apprentissages doit en faire un objet explicite de l'enseignement. Il faut montrer aux étudiants comment analyser, en détail, les points communs et les différences entre les mathématiques académiques et les pratiques dans d'autres professions (Evans, 2000 : 299-300).

Une occasion pour suivre ces recommandations est le contexte de l'application du calcul des dérivées aux problèmes de l'économie. On dit aux étudiants, par exemple, que si C(x) est une fonction représentant le coût total de la production de x unités d'un produit en une période de temps, alors C'(x), appelé coût marginal, représente, en principe, le taux instantané de changement du coût au moment où la production a atteint x unités. On leur explique que, dans la pratique des économistes, C'(x) est souvent interprété comme le coût de la production de la $(x+1)^e$ unité. Le manuel introduit aussi les notions de profit P(x) et de revenu R)x) comme fonctions de x et les notions respectives de profit marginal (P'(x)) et revenu marginal (R'(x)).

> In practice, *C'(x)* is frequently interpreted as the cost of manufacturing the (x+1)-st unit. Although this is not exact, it is usually a good approximation. The justification for this interpretation is based on the fact that x is usually large, so $\Delta x = 1$ can be considered close to zero by comparison. Thus
>
> $$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x} \approx \frac{C(x+1) - C(x)}{1} = C(x+1) - C(x)$$
>
> (Anton, 1992 : 286)

Le transfert est-il facilité par la résolution de problèmes comme le suivant ?

The total profit (in dollars) from the sale of x snowmobiles is $P(x) = 200x - 0.2x^2 - 3200$.

(A) Find the average profit per snowmobile if 40 snowmobiles are produced.

(B) Find the marginal average profit at the production level of 40 snowmobiles.

(C) Interpret the marginal average profit found in (B).

(D) Use the results of (A) and (B) to estimate the average profit per snowmobile if 41 snowmobiles are produced.

(Final examination, MATH 209, Concordia University 2004).

Est-ce que les étudiants ont besoin de réfléchir sur la différence entre le modèle mathématique (continu) et la réalité (discrète) pour le résoudre? Pour résoudre ce problème, les étudiants utilisent des formules et récitent l'interprétation du manuel en réponse au point (C), sans se soucier du fait que 40 n'est pas une valeur bien grande et donc l'approximation, par le nombre 1, de l'accroissement de la variable x, n'est peut-être pas bien justifiée.

Questionnement de l'apport de l'exercice de preuves en géométrie pour la compétence plus générale de raisonnement « logique »

Il y a quelques raisons de croire que l'entraînement aux démonstrations en géométrie n'aide pas forcément à développer le « raisonnement logique ». Voici quelques statistiques, provenant d'une étude TIMSS citée par Howson (2003 : 129).

On regarde les solutions des étudiants d'à peu près 18 ans, prenant des cours avancés de mathématiques, aux deux problèmes : un problème de démonstration en géométrie et l'autre en raisonnement logique. Voici des exemples de tels problèmes[4].

Problème P1 :

Dans le triangle ABC, les hauteurs AA' et BB' se coupent au point O.

On sait que les angles ∠ ABC et ∠ A'OB' sont supplémentaires (leur somme est égale à deux angles droits).

Démontrer que le triangle ABC est isocèle.

Problème P2 :

A l'heure du goûter, à la garderie, on a donné des biscuits aux enfants. Il y avait 15 enfants. Didier a mangé 13 biscuits, et chacun des autres enfants en a mangé moins que ce nombre.
Trouve, si possible, parmi les énoncés suivants, ceux qui s'ensuivent logiquement de l'information ci-dessus.
A. Il reste 2 biscuits pour les autres enfants.

[4] Les problèmes P1 et P2 sont des exemples des types de problèmes qui auraient pu être donnés dans l'étude TIMSS. Ce ne sont pas exactement ces problèmes; Howson ne cite pas ces problèmes dans son article.

B. Au moins deux enfants ont mangé chacun au moins deux biscuits.
C. Au moins deux enfants ont mangé le même nombre de biscuits.
D. Au moins un enfant n'a pas mangé de biscuits.

On compare les pourcentages des élèves qui ont obtenu des réponses correctes, pour la Grèce, la France et les Etats-unis (Table 2).

Table 2. Résultats d'une étude TIMSS

	% d'étudiants 18+ en maths avancées	**Problème de démonstration**	**Problème de raisonnement**
Grèce	10%	65%	33.8%
France	20%	53%	61.8%
USA	14%	< 10%	70.0%

Data from the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) relating to pure geometrical knowledge of 18+ specialist mathematics students in their last year of secondary school make dismal reading. For example, an open response item asking students to prove a triangle was isoceles (given angle facts relating to two of its altitudes) was answered correctly by fewer than 10% of US specialist students ; the corresponding percentages for two groups og high scoring students, from Greece and France, were 65 and 53 respectively. ('Specialist students' represented approximately 14%, 10% and 20% of the three coutries age cohorts.) However, before one reads too much into these results and *the students' abilities to think logically,* it should be noted that the percentages of students able to identify which of four statements could be logically deduced from the fact that (to paraphrase) 21 letters had been placed in 4 pigeon holes were : US, 70.0 ; France, 61.8, and Greece, 33.8. (Howson, 2003)

4.— ENSEIGNER LA PREUVE – C'EST DIFFICILE.

LES RESULTATS VALENT-ILS L'EFFORT?

On peut demander aux étudiants de justifier leurs résultats, mais alors il faut s'attendre à des arguments de toutes sortes, qu'on ne pourra pas évaluer avec les mêmes critères que d'autres types de réponses. Les enseignants des mathématiques ont horreur de corriger les exercices contenant des raisonnements plus longs. Il faut établir des critères pour chaque problème séparément et ceci seulement après avoir vu les solutions de tous les étudiants. Dans beaucoup de cas, il est difficile d'établir comment l'étudiant a raisonné, car il peut avoir du mal à s'exprimer, surtout si la langue d'enseignement est différente de sa langue maternelle.

Un autre problème pour les enseignants est le suivant. La preuve mathématique n'a de sens que dans un système théorique, avec les concepts introduits par des axiomes et définitions, une notation symbolique incluant des règles de manipulation, des propositions et théorèmes. Le temps donné pour une quelconque théorie étant maigre (on doit familiariser l'élève ou l'étudiant avec un grand nombre de concepts provenant de théories diverses – ce n'est plus que la géométrie, l'arithmétique et l'algèbre comme autrefois), si l'on voulait faire faire des preuves aux étudiants, on en serait resté au tout début de la théorie, avec des théorèmes pas très importants ou prégnants pour les applications. Par exemple, en algèbre linéaire on fait un grand cas de la démonstration qu'il n'y a qu'un seul zéro dans un espace vectoriel). En plus, les systèmes qui permettent de faire des preuves rigoureuses à base d'un petit nombre de règles ne peuvent être que des modèles très simplistes d'une réalité mille fois plus complexe. Ces modèles ne permettent donc d'expliquer que très peu de chose. À quoi bon les utiliser, alors?

L'enseignement des démonstrations mathématiques est notoire pour sa difficulté. Dans une recherche faite en Belgique (Burton et Detheux-Jehin, 1998) sur un échantillon de 1063 élèves finissant leur premier degré du secondaire, seulement 14% des élèves ont atteint la « maîtrise » dans la démonstration d'une propriété géométrique (obtenu une note de plus d 80%). Le taux de maîtrise n'était plus bas que sur deux autres compétences : résolution de problèmes (10%) et manipulations algébriques (9%). Les élèves maîtrisaient le mieux les problèmes ou il s'agissait « d'associer une équation à une représentation concrète » (taux de maîtrise = 69%) et « comparer la valeur de l'inconnue dans deux équations » (taux de maîtrise = 66%). Il est donc même plus difficile d'enseigner la résolution des problèmes que l'art de la démonstration, mais dans la résolution des problèmes, au moins, les élèves ont plus de moyens de contrôle sur la validité de leurs solutions. Et la valeur éducative pour tous les élèves de la résolution des problèmes est plus évidente que celle des démonstrations mathématiques plus ou moins formelles.

La recherche mentionnée a été conduite pour diagnostiquer les causes d'un taux élevé de retard scolaire en Communauté française de Belgique relativement aux autres pays européens et cela après une réforme de l'enseignement fondamental et secondaire qui voulait promouvoir l'idée d'une « école de réussite ». Les auteurs disent :

> [L'idée de l'école de réussite] devait se traduire [en mathématiques] par la préoccupation déclarée de dispenser à tous les élèves les bagages mathématiques nécessaires au développement de *citoyens* critiques et responsables. Cependant, à l'opposé des objectifs définis par les pouvoirs publics, les indices quantitatifs dévoilant une tout autre réalité du terrain éducatif se sont accumulés au fil du temps. Il existerait donc des écarts importants entre les objectifs visés et réalisés. (Burton & Deteux-Jehin, 1998).

Parmi les facteurs responsables de tels résultats, les auteurs mentionnent la « culture de l'échec » qui induit les enseignants à instaurer des pratiques d'évaluation normative, de varier leurs exigences et les élever au-delà des objectifs formulés dans les programmes en fonction de la maîtrise maximale atteinte dans la classe. Ces pratiques, disent-ils, constituent « une puissante contrainte à toute tentative de la démocratisation de l'école.… Le système éducatif belge est marqué par une véritable culture de l'échec…. ».

Ces auteurs mentionnent aussi « les imprécisions des consignes d'évaluation » comme cause possible des résultats médiocres. Ces imprécisions, je crois, ne peuvent pas êtres éliminés en ce qui concerne l'évaluation des preuves produites par les élèves – ceci n'est pas possible *par principe*. Il y aura donc toujours une grande liberté et donc variabilité dans l'évaluation parmi les différents enseignants et parmi les évaluations de différents étudiants par un même enseignant.

> Mathematical 'rigorists' believe that it is posssible, by representing a mathematical proof in the language of first order logic, to establish beyond any doubt the validity of a mathematical statement. But they fail to make clear that such derivations are purely hypothetical activities (except for 'toy' problems that might be played with as exercises in a course in logic). The actual situation is this. On the one hand, we have real mathematics, with proofs which are established by 'consensus of the qualified'[5]. A real proof is not checkable by a machine, or even by any mathematicians not privy to the gestalt, the mode of thought of the particular field of mathematics in which the proof is located. Even to the 'qualified reader', there are normally differences of opinion as to whether a real proof (i.e. one that is actually spoken or written down) is complete or correct. These doubts are resolved by communication and explanation, never by transcribing the proof into first-order predicate calculus. (Davis, Hersh & Marchisotti, 1995 : 392)

5.— Apprendre la preuve – c'est difficile.

Quels en sont les couts didactiques et sociaux?

Faire des preuves, c'est difficile parce que c'est un acte créatif dans un domaine très particulier de pensée

La preuve de l'énoncé à propos d'une condition suffisante pour qu'un triangle soit isocèle peut se réduire, finalement, à un petit calcul formel (voir Figure 1).

Démonstration.

Par hypothèse, $\angle A'OB' = 180 - (a+b)$ (1)

Par le théorème de l'angle extérieur dans un triangle, $\angle A'OB' = 90 + a$ (2)

(1) & (2) impliquent $2a = 90 - b$, ce qui donne $90 - a = a + b$ (3)

Par la somme des angles d'un triangle, $\angle ACB = \angle B'CB = 90 - a$ (4)

Comme $a + b = \angle ABC$, par (3) & (4), $\angle ABC = \angle ACB$

et le triangle ABC est isocèle, C.Q.F.D.

[5] Ainsi, c'est l'enseignant qui décide si la preuve est valide ou non, déprivant l'étudiant du contrôle sur les résultats de son activité de preuve: l'étudiant est, par définition, 'non qualifié'. L'étudiant est non-qualifié puisqu'il n'est pas encore tout à fait initié aux rites de la culture mathématique. Il n'a donc pas l'authorité requise pour dire que c'est lui qui a raison et l'enseignant qui a tort.

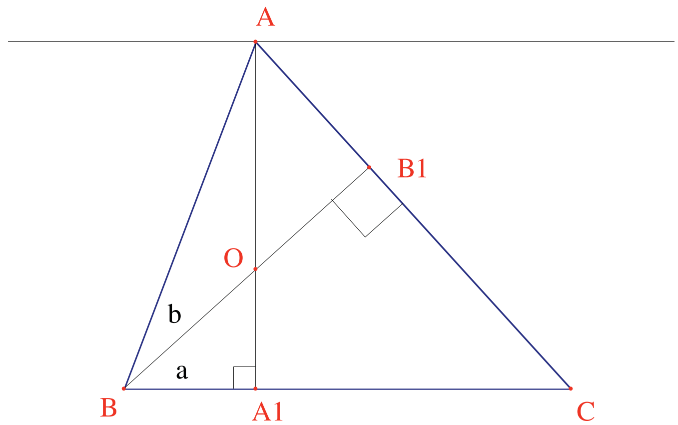

Figure 1. Figure pour le problème du triangle isocèle.

Mais il ne suffit pas de savoir calculer pour trouver la preuve. Il faut encore voir des relations entre les éléments de la figure et il faut savoir choisir, parmi celles-ci, des relations utiles pour le but envisagé. La preuve est toujours un acte créatif.

> [I]n the figure certain lines… seem to be extraneous to a minimal figure drawn as an expression of the theorem itself.… The extraneous lines which in high school are often called 'contruction lines', complicate the figure, but form an essential part of the deductive process. They reorganize the figure into subfigures and the reasoning takes place precisely at this level. Now, how does one know where to draw these lines so as to reason with them ? It would seem that these lines are accidental or fortuitous. In a sense this is true and constitutes the genius or the trick of the thing. Finding the lines is part of finding the proof, and this may be no easy matter. With experience come insight and skill at finding proper construction lines. One person may be more skillful at it than another. There is no graranteed way to arrive at a proof. This sad truth is equally rankling to schoolchildren and to skillful mathematicians. (Davis, Hersh & Marchisotto, 1995 : 166)

Solutions didactiques visant à réduire la difficulté de la preuve

Pour réduire les difficultés de l'invention de la preuve en géométrie, on a créé des logiciels de géométrie dynamique comme Cabri et SketchPad, par exemple. On voulait aussi rendre les raisonnements scolaires en géométrie plus basés sur des explorations et des conjectures et la vérification des conjectures et moins sur la récitation des preuves et leur rédaction dans un langage rigide. Et alors les années 1990 ont vu la prolifération des problèmes comme le suivant:

> Construis un segment BC et une droite d parallèle à la droite BC, différente de BC. Prends un point A sur d. Construis le triangle ABC. Construis les hauteurs BB' et CC' de ce triangle. Ces hauteurs se coupent en un point O. (a) Bouge le point A sur d et observe le point O. Vois-tu quelque chose d'intéressant ? Pose des conjectures et essaie de les vérifier. (b) Bouge maintenant la droite d (en la conservant parallèle à BC). Peux-tu expliquer ce qui se passe ?

On espérait que les logiciels permettraient à un nombre plus grand d'élèves de découvrir les relations importantes dans la figure et donc d'obtenir l'idée principale de la preuve, sans pour cela avoir du génie ou du talent à « voir dans sa tête ». On espérait que si seulement les élèves savaient ce qu'il faut démontrer dans le problème ci-dessus, ils produiraient alors sans grande difficulté des solutions comme la suivante :

> *Solution possible au problème d'exploration*
>
> On observe que le locus du point O par rapport au point A variant sur la droite d parallèle à BC a l'air d'une parabole. On le vérifie à l'aide des moyens de géométrie analytique.
>
> On pose : A(t, a) ; B(-b, 0) ; C(b, 0), où b > 0.
>
> BB' : $y = (b-t)/a\ x + b(b-t)/a$
>
> CC' : $y = -(b+t)/a\ x + b(b+t)/a$
>
> Intersection O de BB' et CC' : $(t, (-t^2 + b^2)/a$
>
> Plus la distance a de la droite d à la droite BC est grande, plus la parabole est « applatie » et plus son sommet est proche de l'origine des axes, car le coefficient du carré de la variable indépendante diminue, et il en est de même du coefficient libre.

Les recherches ont montré, cependant, qu'il est très difficile d'obtenir, des élèves, des démonstrations analytiques après qu'ils eurent trouvé la réponse d'une manière empirique à l'aide de la machine. On obtenait facilement l'activité de conjecture, mais pas l'activité de vérification de conjectures. Il est clair qu'il faut construire des problèmes très spéciaux pour forcer des démarches de raisonnement théorique et non basé sur l'évidence visuelle (un travail de recherche dans cette direction est fait en France autour de Colette Laborde).

Les démonstrations sont des textes qui ont peu à voir avec les raisonnements utilisés pour s'expliquer un fait ou valider un résultat

Les raisonnements mathématiques rendent les étudiants plus en contrôle de ce qu'il font en mathématiques et d'autres domaines. Mais je ne suis pas sûre si une production de textes appelés 'preuves mathématiques' soumis à l'évaluation par une note scolaire peut jouer le même rôle. Dans ce cas, les étudiants se demandent surtout « quel genre de texte l'enseignant veut que je produise », car nous ne pouvons pas leur donner des moyens de contrôle sur la validité mathématique de leurs preuves ! Qu'une preuve soit correcte ou non – il n'y a pas de critères simples et communicables à des débutants. Cela revient donc toujours à l'enseignant de décider si une preuve est bonne ou non. Et ainsi l'étudiant reste dépendant de l'enseignant. Il y a, bien sûr, quelques méthodes ou techniques de preuve (comme l'induction, preuve par contraposition), mais la plupart de temps une preuve demande de « voir » un aspect d'une certaine manière pour avoir

« l'idée de la preuve » et cela ne s'obtient pas en suivant une procédure. Il faut du talent ou beaucoup d'expérience difficile à acquérir (voir, p. ex., Castela, 2004).

Voici un témoignage d'une de nos étudiantes, admise au programme des mathématiques à l'université mais exclue du programme d'études commerciales.

Elle est revenue aux études après 9 ans de travail comme comptable dans une entreprise. On ne lui a pas permis de continuer d'occuper ce poste parce qu'elle n'avait pas de diplôme universitaire de comptable. Elle a voulu entrer au programme d'études commerciales, mais ses notes en mathématiques étaient trop basses pour lui gagner l'admission. Elle a donc été admise en mathématiques et statistiques. Le premier cours obligatoire dans ce programme est un cours dénommé « Introduction to Mathematical Thinking », où les étudiants apprennent quelques rudiments de logique et de méthodes de preuve, dans le contexte des nombres et des fonctions. Comme comptable, cette étudiante a dû résoudre pas mal de problèmes à l'aide de certains raisonnements, mais cette expérience ne lui a apparemment servi à rien dans le cours. Elle s'y sentait complètement perdue. Dans une entrevue, elle nous a dit :

J: I'm doing the course on Mathematical Thinking. I never expected to do arguments in Math and I'm saying I'm lost in proving. How do you prove? And I want to learn how to prove, but I just don't get it. Why this is this and why this is that, you know it's so hard to get. Exam's coming up and you haven't quite clicked at it. And the way how the teachers put the question is **very hard to figure out what they want**.

A: I think the classical question that they ask in these courses is ' why even plus even equals even'.

J: Okay, odd and an even. You get an odd. So that means one of them must be an odd, so you have to argue why one of them is an odd. So, that I understand, you know, but it's when they put, prove the square root of something is irrational, and then you have to, you know, it's complicated…

C: Yeah, yeah, yeah.

J: For me, **I just want to understand what I'm doing**. I expected some help, just never found it.

A: So that's where you're frustrated?

J: Yeah.

(Research on frustration in preparatory math courses; Interview with JesTia, mature student, 2003)

La réussite en mathématiques est une mesure socialement reconnue de l'aptitude académique; l'échec mène à l'exclusion

Certains sociologues craignent que les exigences vis-à-vis de l'apprentissage des mathématiques ne fassent croître la délinquance scolaire ou les dépressions nerveuses. Par exemple,

« [I]l faudrait aussi examiner le lien entre la nouvelle délinquance scolaire… et la logique de la compétition forcenée qui domine l'institution scolaire et surtout l'effet de destin que le système scolaire exerce sur les adolescents : c'est souvent avec une très grande brutalité psychologique que l'institution scolaire impose ses jugements totaux et ses verdicts sans appel qui rangent tous les élèves dans une hiérarchie unique des formes d'excellence – dominée aujourd'hui par une discipline – les mathématiques. Les exclus se trouvent condamnés au nom d'un critère collectivement reconnu et approuvé, donc psychologiquement indiscutable et indiscuté, celui de l'intelligence : aussi n'ont-ils souvent pas d'autre recours, pour restaurer une identité menacée, que les ruptures brutales avec l'ordre scolaire et l'ordre social (on a observé, en France, que c'est dans la révolte contre l'école que se façonnent et se soudent nombre de bandes de délinquants) ou, comme c'est aussi le cas, la crise psychique, voire la maladie mentale ou le suicide. » (Bourdieu, 1994 : 49-50)

Il est probable que l'exigence de l'apprentissage de la démonstration mathématique, davantage que l'apprentissage de l'argumentation, favorise les enfants des familles qui valorisent les textes écrits et les connaissances théoriques et risque de mettre en échec les enfants vivants dans des familles préférant la culture visuelle et orale de la télévision et des films. Les premiers ont moins de mal à obtenir des diplômes universitaires et accéder aux postes dominants dans la société détenus par leurs parents. Et ainsi se défait l'idéal démocratique de l'accès au pouvoir à base de mérite et non d'hérédité génétique et économique.

Le système scolaire… maintient l'ordre préexistant, c'est-à-dire l'écart entre les élèves dotés de quantités inégales de capital culturel. Plus précisément, par toute une série d'opérations de sélection, il sépare les détenteurs de capital culturel hérité de ceux qui en sont dépourvus. Les différences d'aptitude étant inséparables de différences sociales selon le capital hérité, il tend à maintenir les différences sociales préexistantes.… En instaurant une coupure entre les élèves des grandes écoles et les élèves des facultés, l'institution scolaire institue des frontières sociales analogues à celles qui séparaient la grande noblesse de la petite noblesse, et celle-ci des simples roturiers. Cette séparation est marquée, d'abord dans les conditions de vie même, avec l'opposition entre la vie recluse de l'internat et la vie libre de l'étudiant, ensuite dans le contenu et surtout dans l'organisation du travail de préparation aux concours : d'un côté, un encadrement très strict et des formes d'apprentissage très scolaires, et surtout une atmosphère d'urgence et de compétition qui impose la docilité et qui présente une analogie évidente avec le monde de l'entreprise; de l'autre, la 'vie étudiante' qui, proche de la tradition de la vie de bohème, comporte beaucoup moins de disciplines et de contraintes, même dans le temps consacré au travail ; elle se marque enfin dans et par le concours lui-même et par la coupure rituelle, véritable frontière magique, qu'il institue, en séparant le dernier reçu du premier collé par une différence de nature, marquée par le droit de porter un nom, un titre. (Bourdieu, 1994 : 41)

Même les étudiants très doués en mathématiques n'aiment pas forcément faire des preuves

Un étudiant en actuariat — avec un talent spécifique pour les mathématiques (16 ans et déjà à l'université) — que nous avons questionné sur son expérience d'apprentissage d'algèbre linéaire, nous a dit qu'il avait du mal à « voir » de quoi il s'agissait dans la théorie. Il luttait contre son incompréhension en étudiant les démonstrations de tous les théorèmes introduits dans le cours, même celles que l'enseignant omettait en classe. Il en avait besoin, disait-il, pour mieux « visualiser » les liens entre les concepts et comprendre les raisons derrière les théorèmes.

How do I read proofs? I start by reading the theorem. What they are claiming. And try to see in my mind, try to see a picture of what they are talking about, like this part is that part, so what is this and what is that, and try to see a coonnection, or looking at properties, and trying to find a way to get from one to the other, or… [I make] a lot of notes, and drawings…. It helps because the vision is like the faculty of learning." (Student O2 in Sierpinska, Nnadozie & Oktaç, 2002: 89)

L'étudiant O2 ressentait le besoin de vérifier ou « voir » la validité du savoir qu'il apprenait par lui-même; la seule autorité de l'enseignant ne suffisait pas.

I would think it is better for me to discover the truth myself. Like, instructors aren't there to just tell you what's true or false. It it [were] true… then where would they start… to try to see these concepts if they were all lied on… There must be someone who had discovered it. And when you discover something, what's true or what's false, then it stays in your mind….. Probably, you should rely on your teachers to teach you some things, and based on those you can, you can find the truth about other things. Like, they show you some building blocks, and you use the building blocks to build other things, but they're not there to show you everything. (O2, in Sierpinska, Nnadozie & Oktaç, 2002: 89).

Mais ce même étudiant O2 n'aimait pas faire des « exercices de démonstration ». Il était sûr qu'il va appliquer les mathématiques dans sa profession future, mais il ne se préparait pas à devenir mathématicien chercheur et l'apprentissage de la rédaction des démonstrations ne l'intéressait pas.

I know [the proof exercises] are important, but I hate them because they are a big hassle. You really have to work a lot of time on it. It's not a specific example you have to do. When you have so many things to do, and you have a proof, you can't say, it's going to take me 5 to 15 minutes, because for that problem it's probably going to take you much more. Or, you'll have to seek some help. But,… for [a computational exercise], they're all similar. So you just have to follow the technique and practice on it. (Student O2 in Sierpinska, Nnadozie & Oktaç, 2002: 89)

6.— REMARQUES FINALES

Qu'est-ce qui caractérise les raisonnements mathématiques parmi d'autres raisonnements théoriques ?

Les raisonnements en mathématiques sont théoriques, c'est-à-dire que leur but est la production des théories ou de systèmes conceptuels. Cela a des conséquences comme le caractère

- réflexif (les techniques ou procédures restent toujours ouvertes au questionnement) ;
- systémique (les objets de la pensée sont des systèmes de relations ; le sens des termes est stabilisé par des définitions ; la pensée est concernée par les questions de validité, de méthodologie ; les constatations sont toujours hypothétiques…) ;
- analytique (la relation entre la pensée et son objet est médiatisée par des systèmes de signes)

de ces raisonnements. (Sierpinska, 2005).

Mais le caractère théorique des raisonnements n'est pas spécifique aux mathématiques. Il y a des raisonnements théoriques dans les sciences physiques, en chimie, en biologie, en économie, en psychologie, en linguistique, dans les sciences de l'éducation, mais aussi dans la littérature et la philosophie. Mais en littérature et la philosophie, par exemple, le raisonnement est toujours sous le contrôle du sens. Dans les sciences de l'éducation et partout où l'on utilise les statistiques, ainsi que dans les sciences (physique, chimie, astronomie, etc.) où l'on construit des modèles mathématiques, il y a une partie du raisonnement qui est sous le contrôle d'un calcul formel (numérique, algébrique, logique). En mathématiques aussi une partie du raisonnement est sous le contrôle d'un calcul formel, mais la différence avec les autres sciences est que, en mathématiques, la possibilité d'un tel contrôle est une préoccupation majeure. On cherche à construire des systèmes de concepts et des notations qui rendraient possible de confier au calcul formel des espaces les plus vastes du raisonnement, assurant un contrôle automatique, sûr, indépendant de l'état d'esprit du penseur. On développe aussi des moyens de s'assurer que les calculs font bien ce qu'on veut qu'ils fassent, dans les conditions le moins contraignantes possible.

L'activité du calcul formel, en elle-même, ne constitue pas les mathématiques. Le calcul formel est un produit du travail du mathématicien, et c'est aussi son outil de raisonnement. Mais quelqu'un qui fait des additions ou résout une équation différentielle par une méthode connue ne fait pas encore (ou ne fait plus), en ce moment, des mathématiques.

2. Si telle est la nature des raisonnements mathématiques, quelle est leur pertinence pour la formation de futurs citoyens?

Les questions qui sous-tendent les raisonnements mathématiques sont-elles accessibles et intéressantes pour les élèves des écoles primaires et secondaires et pour les étudiants ne se dirigeant pas vers les mathématiques? L'entraînement à faire de tels raisonnements a-t-il quelque valeur pour l'éducation des futurs citoyens et professionnels autres que les mathématiciens?

Les éducateurs et les mathématiciens surestiment le pouvoir et applicabilité universelle des raisonnements mathématiques et des modèles généraux. Il y a peu d'applications, en dehors des mathématiques, des raisonnements dans des systèmes de concepts explicites et bien définis. Les praticiens de diverses professions ont beaucoup de contrôle sur ce qu'ils font, mais les preuves mathématiques ne sont pas, normalement, les moyens de ce contrôle. Les problèmes dans le milieu de travail sont la plupart de temps trop complexes et trop urgents pour être résolus à l'aide des raisonnements mathématiques seulement.

Je crois donc que, dans l'enseignement général des mathématiques, il faut se restreindre aux raisonnements dont une partie est sous le contrôle d'un calcul formel, mais ne pas exiger de tous les élèves qu'ils reviennent ensuite sur leurs raisonnements pour les écrire dans un code spécifié et pour se poser à leur sujet toutes sortes de questions purement mathématiques.

3. L'entraînement scolaire aux raisonnements mathématiques va-t-il produire des employés plus autonomes dans leur travail ?

On dit qu'aujourd'hui, l'industrie n'a plus besoin de travailleurs « en ligne » qui ne font que suivre des instructions et font les mêmes gestes jour après jour pendant des années, mais de décideurs, d'organisateurs du travail. On souhaite donc que les gradués de nos écoles soient à même de prendre des décisions d'une façon autonome et informée de toutes sortes de faits et de relations entre les variables du système avec lequel ils travaillent. Ils ne vont pas apprendre cela dans des cours de preuve en mathématique. Ces cours peuvent rendre les étudiants encore plus dépendants des enseignants. Ils ne vont pas apprendre tout ça, non plus, dans des cours où ils ne font que manipuler des inscriptions formelles ou substituer des nombres aux variables dans des formules toutes faites pour calculer des valeurs demandées. Quel est donc le conseil qu'on puisse donner?

Les élèves doivent surtout « savoir ce qu'ils font » en mathématiques et en sciences

L'école a le devoir de préparer les jeunes à devenir des membres actifs de la société et non seulement des mangeurs passifs de bonbons. Pour cela, il faut que les élèves aient l'expérience et le goût de raisonner, c'est-à-dire de se poser des questions pour savoir pourquoi et comment les choses sont comme elles sont. Mais ce but ne sera pas nécessairement atteint par moyen de l'exercice des démonstrations géométriques de type : démontrer que, dans telles et telles conditions, un tel triangle est isocèle. Par contre, il y a un grand potentiel dans des questions comme Freudenthal a proposé, il y a bien longtemps :

> Why does a piece of paper fold along a straight line ?
> Why does a rolled piece of paper become rigid ?
> Why does a tied paper ribbon show a regular pentagon ?
> How do shadows originate ?
> What is the intersection of a plane and a sphere or two spheres ?
> Why can the radius of a circle be transferred six times around its periphery ?
> How come a beautiful star arises by this construction ?
>
> (Freudenthal, 1973 : 404)

L'etudiante adulte « JesTia », citée plus haut se plaignait que, bien qu'elle ait été capable de démontrer quelque propriétés des nombres, elle avait du mal à « savoir ce qu'elle faisait ». Elle avait du mal à savoir, dans le cas de certains problèmes concrets, qu'est-ce c'était qu'elle cherchait, pourquoi, et si ce qu'elle a trouvé était bien ce qu'elle cherchaient. Mais elle manquait aussi d'une perspective plus large sur ce qu'elle faisait, en général, dans ce cours ; quel était le but et le sens de toutes ces activités de preuve. L'idée que, « savoir ce qu'on fait » dans la pratique de la construction du savoir scientifique, c'est de chercher des régularités ou des « lois », et pas seulement de s'assurer qu'un tel ou un autre énoncé particulier est vrai pour toutes les valeurs d'une certaine variable, lui échappait. En focalisant l'attention des étudiants sur des vérités « locales » et des méthodes précises de les démontrer, on risque de perdre de vue que, dans une perspective plus large de la pratique des sciences, l'erreur locale n'a pas tellement d'importance. Comme disait si bien le physicien et philosophe Jan Bronowski,

> The future is, as it were, always a little out of focus, and everything that we foresee in it is seen embedded in a small area of uncertainty. It is the human situation and the situation of science. We do not contemplate the facts without error, but because we know what we are doing, we may act upon them without fear [paraphrase de Clifford, un physicien du 19e siècle). 'Because we know what we are doing' : this is the crux of science. We are not merely observing and predicting facts ; and that is why any philosophy which builds science only from facts is mistaken. We *know*, that is we find laws ; and every human action uses these laws, and at the same time tests them and feels towards new laws. It is not the form of these laws which matters. The laws of science, like those which we use in our private behaviour, remain helpful and truthful whether they contain words like 'always', or only 'more often than not'. What matters is the recognition of the law in the facts. It is the law we verify : the pattern, the order, the structure of events. This is why science is so full of symbolism of numbers and geometry, which are the most familiar expressions of structural relations. (Bronowski, 1960/1951 : 134)

Devons nous déléguer la prise de conscience de ce principe de l'avancement de la science aux cours de « pensée critique », si populaires parmi les étudiants (voir, p.ex. Boisvert, 1999 ; Breton & Gauthier, 2000)? Dans ces cours, cette perspective globale n'est transmise que comme une philosophie, un savoir descriptif. Ce n'est que dans les cours de mathématiques et de sciences, que les étudiants ont la chance de pétrir, avec leur propres mains, la pâte du savoir scientifique en toute conscience de ce qu'ils font.

Comment donc aider les élèves à comprendre ce qu'ils font en mathématiques de façon à ce que cela leur soit utile dans leurs professions futures? On dit que la notion de fonction est peut-être privilégiée dans sa capacité de créer des ponts entre les mathématiques académiques et les mathématiques d'autres professions. Mais ce n'est pas en démontrant rigoureusement qu'une relation donnée est une fonction bijective, que ce pont pourra être créé. Les exercices algébriques sur les limites et dérivées n'assureront pas ce pont non plus. Il faut des approches beaucoup plus subtiles. On en trouve quelques suggestions dans les articles du numéro spécial de la revue *Educational Studies in Mathematics* (Volume 57.3, 2004; *On forms of knowing: The role of bodily activity and tools in mathematical learning*). On y montre, entre autres, que l'interaction avec des outils, l'activité physique, prioperception, le contrôle de son corps afin d'obtenir une motion avec certaines caractéristiques mathématiques (p.ex. suivant une courbe représentée graphiquement) rendent les élèves plus maîtres de l'étude de variation des fonctions que les démonstrations formelles basées sur les définitions et théorèmes à propose des fonctions et des dérivées. Il y a sans doute d'autres approches à découvrir ou redécouvrir.

REFERENCES

Anton, H. : 1992, *Calculus with Analytic Geometry, Brief Edition, Fourth Edition*, New York : John Wiley & Sons, Inc.

Aron, A.A. & Aron, E.N. : 2002, *Statistics for the Behavioral and Social Sciences. A brief course*. Second Edition. Prentice-Hall Canada, Inc., Toronto.

Boisvert, J. : 1999, *La formation de la pensée critique*, Saint-Laurent, Québec : ERPI (Editions du Renouveau Pédagogique, Inc.)

Bourdieu, P.: 1994, *Raisons pratiques*, Paris: Editions du Seuil.

Breton, P. & Gauthier, G. : 2000, *Histoire des théories de l'argumentation*, Paris : Editions La Découverte.

Bronowski, J. : 1960/1951 *The Common Sense of Science*, London : Penguin Books.

Burton, R. & Detheux-Jehin, M. : 1998, 'Evaluation des finalités éducatives de l'enseignement des mathématiques en communauté française de Belgique', *Actes de la 50e Rencontre de la CIEAEM, Neuchâtel – Suisse, 2-7 août 1998*, pp. 74-79.

Castela, C. : 2004, 'Institutions influencing mathematics students' private work', *Educational Studies in Mathematics* 57.1, 33-63.

Davis, P.J., Hersh, R., Marchisotto, E.A. : 1995, *The Mathematical Experience. Study Edition*, Boston : Birkhäuser.

Duval, R. : 1995, *Sémiosis et la pensée humaine. Régistres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne : Peter Lang.

Evans, J. : 2000, 'Adult mathematics and everyday life : Building bridges and facilitating learning 'transfer'', in D. Coben (ed.), *Perspectives on Adults Learning Mathematics*, Dortrecht : Kluwer, pp. 289-305.

Freudenthal, H.: 1973, *Mathematics as an Educational Task*, Dortrecht: Reidel.

Hogg, R.V. & Tanis, E.A : 2001, *Probability and Statistical Inference*, Sixth Edition, Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall.

Howson, G. : 2003, 'Geometry : 1950-70', in D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B.R. Hodgson & G. Schubring (eds), One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique, Moments of Mathematics Education in the Twentieth Century, *L'Enseignement Mathématique, Monographie No. 39*, pp. 113-132.

Noss, R. & Hoyles, C. : 1996, 'The visibility of meanings : Modelling the mathematics of banking', *International Journal of Computers for Mathematics Learning* 1.1, pp. 3-31

Noss, R., Hoyles, C. & Pozzi, S. : 2000, 'Working knowledge : mathematics in use', in A. Bessot & J. Ridgway (eds), *Education for Mathematics in the Workplace*, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, pp. 17-35.

Sierpinska, A. : 2005, 'On practical and theoretical thinking and other false dichotomies in mathematics education', in M.H.G. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (eds), *Activity and Sign – Grounding Mathematics Education*, New York : Springer, 117-135.

Sierpinska, A., Nnadozie, S., & Oktaç, A. : 2002, *A Study of Relationships between Theoretical Thinking and High Achievement in Linear Algebra*, Concordia University Report, available at http://alcor.conccordia.ca/~sierp/downloadpapers.html